SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Josip Žubrinić

JEDNADžBA POROZNE SREDINE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Mladen Jurak

Zagreb, lipanj, 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Jednadžba porozne sredine je jedan od najvažnijih primjera nelinearne difuzijske jednadžbe paraboličkog tipa. Njena nelinearnost rezultira degenerirajućim karakterom koji je razlikuje od njenih linearnih rođaka poput jednadžbe provođenja i bitno otežava matematičku teoriju. U ovome tekstu prezentiramo kratki pregled njenih svojstava i matematičkih metoda kojima se pristupa u analizi ovakve jednadžbe.

Jednadžba je našla primjenu u opisu različitih prirodnih procesa koji uključuju: tok fluida, prijenos topline, difuziju tvari... Neki od bitnijih modela koji uključuju JPS su: opis toka plina kroz izotropnu poroznu sredinu, infiltracija podzemnih voda kroz tlo, radijacija topline u plazmama. Pojavljuje se i u matematičkoj biologiji, toku nemješivih fluida, modeliranju magme.

Uz jednadžbu porozne sredine, bavimo se i njenim poopćenjima za koje vrijedi ista teorija egzistencije i jedinstvenosti rješenja. Njena rješenja imaju puno fizikalnija svojstva od rješenja sličnih linearnih jednadžbi, poput konačne brzine širenja. Takvo svojstvo rezultira pojavom slobodne granice koja odvaja područje do kojeg informacija još nije doputovala.

Iako je naizgled jednostavnog oblika, jednadžba predstavlja izvjestan izazov i u teorijskom smislu i u numeričkom rješavanju.

U prvom poglavlju nabrajamo i izvodimo neke od najvažnijih modela vezanih uz JPS. Drugo poglavlje je posvećeno računanju nekih njenih analitičkih rješenja koja nam daju daljnji uvid u svojstva jednadžbe. U trećem poglavlju dajemo kratki osvrt na teoriju kvazilinearnih paraboličkih jednadžbi te izvodimo bitne apriorne ocjene. Četvrto poglavlje sadrži teoriju slabih rješenja Dirichletove rubne zadaće. Na kraju, u petom poglavlju dajemo numerički primjer rješenja vezanog uz dvofazni tok.

Rad se u velikoj mjeri oslanja na teoriju obrađenu u knjigama [4] i [2].

Poglavlje 1

Primjene i modeli

Jednadžba porozne sredine

$$\partial_t u = \Delta(u^m), m > 1, u = u(x,t) \tag{1.1}$$

je primjer nelinearne parcijalne diferencijalne jednadžbe. U ovom poglavlju opisujemo neke od glavnih modela vezanih uz jednadžbu porozne sredine ili uz neke njene generalizacije. Generalizirana jednadžba porozne sredine ili Filtracijska jednadžba je jedno poopćenje jednadžbe (1.1) oblika:

$$\partial_t u = \Delta(\Phi(u)), \tag{1.2}$$

gdje je potencija $m > 0$ zamijenjena općenitijom nelinearnom funkcijom Φ.

Razumijevanje fizikalnih interpretacija i modela je bitno za razvijanje matematičke teorije jer nam takva razmatranja daju dobru intuiciju o tome kako se treba ponašati rješenje jednadžbe.

1.1 Tok plina kroz poroznu sredinu

Jednadžba porozne sredine dobila je svoje ime po modelu toka idealnog plina kroz homogenu poroznu sredinu. Radi se o makroskopskom modelu koji povezuje varijable masene gustoće ρ, tlaka p i prividne makroskopske brzine $\vec{q}$ idealnog plina u poroznoj sredini. Poroznom sredinom nazivamo svaki materijal u kojem su prisutne šupljine ili pukotine. Šupljine u poroznoj sredini nazivamo pornim prostorom i to je prostor koji je ispunjen fluidom. Poroznu sredinu možemo opisati pomoću dviju veličina: poroznosti i propusnosti.

Poroznost je definirana kao omjer volumena pornog prostora i ukupnog volumena porozne sredine

$$\phi = \frac{V_p}{V_{uk}} \in \langle 0, 1 \rangle. \tag{1.3}$$

Međutim, ona općenito nije konstantna i definiramo je općenitije kao

$$\phi(x) \approx \frac{1}{|\Omega(x)|} \int_{\Omega(x)} \chi_{V_p}(y) dy, \tag{1.4}$$

gdje je $\Omega(x)$ neki reprezentativni elementarni volumen oko točke x. Prividna makroskopska brzina fluida se definira kao

$$\vec{q}(x) \approx \frac{1}{|\Omega(x)|} \int_{\Omega(x)} \chi_{V_p}(y) \vec{v}(y) dy, \tag{1.5}$$

gdje je $\vec{v}$ mikroskopska brzina fluida. Ona predstavlja izvjesno usrednjenje brzine u cijelom reprezentativnom elementarnom volumenu i vrijedi sljedeća veza sa srednjom vrijednosti brzine:

$$\vec{q}(x) = \phi \overline{\vec{v}}. \tag{1.6}$$

Model jednofaznog toka kroz poroznu sredinu zasniva se na dva fizikalna zakona. Prvi je zakon sačuvanja mase u poroznoj sredini. Njega zapisujemo u terminima jednadžbe kontinuiteta

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho) + \operatorname{div}(\rho \vec{q}) = 0. \tag{1.7}$$

Naime, ukupna masa fluida u kontrolnom volumenu V je jednaka

$$\int_V \phi(x) \rho(x) dx,$$

dok je masa fluida koji kroz granicu ∂V prođe u jedinici vremena jednaka

$$\int_{\partial V} \phi(x) \vec{q}(x) \cdot \vec{n}(x) d\sigma.$$

Zakon sačuvanja mase kaže da je promjena mase u kontrolnom volumenu V jednaka masi koja je izišla/ušla kroz granicu ∂V u jedinici vremena, tj

$$\frac{d}{dt} \int_V \phi(x) \rho(x) dx = \int_{\partial V} \phi(x) \vec{q}(x) \cdot \vec{n}(x) d\sigma. \tag{1.8}$$

Uz pretpostavku da se radi o dovoljno glatkim funkcijama, primjenom lokalizacijskog teorema dobivamo (1.7).

Drugi zakon je empirijskog karaktera. Naziva se Darcyjev zakon, empirijski zakon kojeg je 1856. godine formulirao francuski inženjer H.Darcy. Darcyjev zakon daje vezu između makroskopske prividne brzine $\vec{q}$, koja se naziva Darcyjeva brzina, i tlaka fluida sljedećom jednadžbom:

$$\vec{q} = -\frac{1}{\mu} \mathbb{K}(\nabla p - \rho \vec{g}). \tag{1.9}$$

Ovdje je μ dinamička viskoznost fluida, $\vec{g}$ je vektor ubrzanja sile teže, a $\mathbb{K}$ je simetričan pozitivno definitan tenzor kojeg nazivamo propusnost porozne sredine. Ako je $\mathbb{K}$ skalarna matrica, kažemo da se radi o izotropnoj poroznoj sredini. Ako je $\mathbb{K}$ konstanta onda kažemo da je sredina homogena.

U slučaju da je fluid kojeg promatramo plin, tada možemo zanemariti gravitacijsku silu zbog male specifične mase plina. Nadalje pretpostavljamo da je sredina izotropna.

Odnos gustoće mase fluida i tlaka fluida daje jednadžba stanja, koja za plinove glasi

$$p = p_0\rho^\gamma, \gamma > 1, p_0 > 0 \tag{1.10}$$

i koja zatvara sustav jednadžbi (1.7), (1.9).

Iako u potpunoj općenitosti parametri ϕ i μ mogu biti funkcije vremena i prostora, u mnogim praktičnim situacijama one su pozitivne konstante.

Uvrštavanjem (1.9) i (1.10) u (1.7) dobivamo

$$\phi\frac{\partial\rho}{\partial t} - \frac{kp_0}{\mu}\operatorname{div}(\rho\nabla(\rho^\gamma)) = 0. \tag{1.11}$$

Međutim, kako je $\rho\nabla(\rho^\gamma) = \nabla(\rho^{\gamma+1}) - \rho^\gamma\nabla\rho$ i $\nabla(\rho^{\gamma+1}) = (\gamma+1)\rho^\gamma\nabla\rho$, imamo da je $\rho\nabla(\rho^\gamma) = \frac{\gamma}{\gamma+1}\nabla(\rho^{\gamma+1})$. Tako dolazimo do jednadžbe

$$\rho_t = c\Delta(\rho^m), m = \gamma + 1, c = \frac{\gamma}{\gamma+1}\frac{kp_0}{\phi\mu}. \tag{1.12}$$

Funkciju ρ možemo lako reskalirati ($\hat{\rho}(x, ct) := \rho(x, t)$) i tako se riješiti konstante c. Time dobivamo jednadžbu porozne sredine (1.1). Kako ćemo u teoriji nepoznatu funkciju označavati s u, korisno je promijeniti neke oznake. Tako oznaku za gustoću ρ zamjenjujemo s u i uvodimo funkciju $v := \frac{m}{m-1}u^{m-1}$ koju nazivamo matematički tlak.

Uočimo da je $\nabla(u^m) = \frac{m}{m-1}u\nabla(u^{m-1}) = u\nabla v$, pa Darcyjev zakon sad ima oblik

$$\vec{q} = -\nabla v = -mu^{m-2}\nabla u.$$

Općenitiji pristup bi bio pretpostaviti da jednadžba stanja ima općenitu formu $p = p(\rho)$ te da k i μ mogu ovisiti o ρ. U tom slučaju dobivamo generaliziranu jednadžbu

$$\rho_t = \operatorname{div}(\rho\frac{k(\rho)}{\mu(\rho)}\nabla(p(\rho))) = \Delta(\Phi(\rho)), \tag{1.13}$$

gdje Φ definiramo sa $\Phi'(\rho) = \rho\frac{k(\rho)}{\mu(\rho)}p'(\rho)$.
Za detalje pogledati [5].

1.2 Tok podzemnih voda

Promatramo model filtracije inkompresibilnog fluida (npr. vode) kroz horizontalni porozni sloj. Ovaj model je prvi put postavio Boussinesq, 1903. godine. Pretpostavljamo da se sloj nalazi na horizontalnoj nepropusnoj podlozi u koju smještamo koordinatni sustav tako da je na donjoj granici $z = 0$. Nadalje, ignoriramo prostornu varijablu y i uzimamo da je visina sloja $H > 0$. Pretpostavljamo da voda koja infiltrira tlo zauzima u svakom vremenskom trenutku područje $\Omega = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2, z \leq h(x, t)\}$, gdje je h funkcija koja opisuje gornju plohu vode. Ovakav problem se naziva problem sa slobodnom granicom jer je nalaženje oblika gornje plohe sastavni dio problema.

Matematički model je određen zakonom sačuvanja mase za nestlačivi fluid i Darcyjevim zakonom. Nepoznate funkcije su nam dvije komponente brzine q_x i q_z, tlak p i funkcija gornje granice $h(x, t)$. Pretpostavljamo još da je tok gotovo horizontalan, odnosno da je z komponenta brzine jednaka 0. Stoga u vertikalnoj Darcyjevoj jednadžbi

$$q_z = -\frac{k}{\mu}(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g)$$

možemo zanemariti lijevu stranu. Integriranjem po z dobivamo

$$p + \rho g z = const. \tag{1.14}$$

Nadalje uvodimo pretpostavku da je tlak zraka koji se nalazi u porama suhog područja $z > h(x, t)$ konstantan i jednak atmosferskom, te ga normaliziramo do $p = 0$. Tako (1.14) prelazi u

$$p = \rho g(h - z), \tag{1.15}$$

tj radi se o hidrostatskom tlaku.

Promotrimo sad zakon sačuvanja mase koji će nam dati jednadžbu za h. Odaberimo kontrolni volumen $S = \langle x, x + a\rangle \times \langle 0, H\rangle$. Zakon sačuvanja mase daje

$$\phi\frac{\partial}{\partial t}\int_S \rho dz dx = -\int_{\partial S} \rho\vec{q}\cdot\vec{n} d\sigma,$$

odnosno

$$\phi\frac{\partial}{\partial t}\int_x^{x+a}\int_0^{h(s,t)} dz ds = -\int_{\partial S}\vec{q}\cdot\vec{n} d\sigma. \tag{1.16}$$

Na desnoj plohi imamo $\vec{q}\cdot\vec{n} = (-\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}, 0)\cdot(1, 0) = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}$, dok je na lijevoj $\vec{q}\cdot\vec{n} = \frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}$. Dakle je

$$\begin{aligned}\int_{\partial S}\vec{q}\cdot\vec{n}d\sigma &= \int_0^{h(x,t)}\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}(x,z)dz-\int_0^{h(x+a,t)}\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}(x+a,z)dz\\ &= \frac{\rho gk}{\mu}\Big[\int_0^{h(x,t)}\frac{\partial h}{\partial x}(x)dz-\int_0^{h(x+a,t)}\frac{\partial h}{\partial x}(x+a)dz\Big]\\ &= \frac{\rho gk}{\mu}\Big[\frac{\partial h}{\partial x}(x)h(x)-\frac{\partial h}{\partial x}(x+a)h(x+a)\Big].\end{aligned}$$

Sad promotrimo lijevu stranu u (1.16)

$$\phi\frac{\partial}{\partial t}\int_x^{x+a}\int_0^{h(s,t)}dzds = \phi\frac{\partial}{\partial t}\int_x^{x+a}h(s,t)ds.$$

Dobili smo da vrijedi

$$\phi\frac{\partial}{\partial t}\int_x^{x+a}h(s,t)ds=-\frac{\rho gk}{\mu}\Big[\frac{\partial h}{\partial x}(x)h(x)-\frac{\partial h}{\partial x}(x+a)h(x+a)\Big]. \tag{1.17}$$

Gornju jednadžbu podijelimo s a i pustimo limes kad $a\to 0$. Dobivamo:

$$\phi\frac{\partial h}{\partial t}(x)=\frac{\rho gk}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{\partial h}{\partial x}(x)h(x)\Big]. \tag{1.18}$$

Tako dolazimo do Boussinesq-ove jednadžbe

$$\frac{\partial}{\partial t}h(x,t)=\frac{\rho gk}{2\mu\phi}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(h(x,t)^2), \tag{1.19}$$

što je JPS uz $m=2$. Jednadžba se analogno poopćava na više dimenzija do jednadžbe

$$h_t=\kappa\Delta(h^2). \tag{1.20}$$

1.3 Nelinearno provođenje topline

Jednadžba porozne sredine ima bitnu primjenu u teoriji provođenja topline uz toplinsku vodljivost koja ovisi o temperaturi.

Jednadžba koja opisuje takav proces ima sljedeći oblik:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\mathrm{div}(\kappa\nabla T), \tag{1.21}$$

gdje je T temperatura, c specifična toplina, ρ gustoća mase medija i κ toplinska vodljivost. U slučaju kad su varijacije parametara zanemarive, dobivamo jednadžbu provođenja topline. Ipak, kad su varijacije temperature reda veličine 10^5 stupnjeva, takve pretpostavke nisu realne.

Pretpostavimo prvo da je toplinska vodljivost funkcija temperature

$$\kappa = \kappa(T).$$

U tom slučaju dobivamo generaliziranu jednadžbu porozne sredine

$$\partial_t T = \Delta(\Phi(T)), \tag{1.22}$$

gdje je

$$\Phi(T) = \frac{1}{\rho c}\int_0^T \kappa(s)ds. \tag{1.23}$$

Ukoliko je ovisnost dana funkcijom $\kappa(T) = aT^n$, gdje su $a, n > 0$ konstante, tada (1.22) prelazi u

$$\partial_t T = b\Delta(T^m), m = n + 1, b = \frac{a}{c\rho m}, \tag{1.24}$$

što je opet JPS.

Pretpostavimo li da je i $c\rho$ funkcija temperature, $c\rho = \psi(T)$, tada opet dobivamo generaliziranu JPS. Naime, uvođenjem funkcije $\Psi(T) := \int_0^T \psi(s)ds$ (1.21) postaje

$$\partial_t(\Psi(T)) = \Delta(\Phi(T)). \tag{1.25}$$

Ukoliko se Ψ može invertirati, tada uz $F := \Phi \circ \Psi^{-1}$, (1.25) možemo zapisati kao

$$\partial_t \hat{T} = \Delta(F(\hat{T})), \tag{1.26}$$

gdje novu varijablu $\hat{T}$ definiramo sa $\hat{T} := \Psi(T)$.

Gornji modeli se koriste za opisivanje radijacije topline u ioniziranim plinovima (plazmama) pri jako visokim temperaturama.

1.4 Nemješivi tok

Promatramo jednadžbe koje izlaze iz proučavanja toka dvaju nemješivih fluida kroz poroznu sredinu. Pretpostavljamo da je tok inkompresibilan te da je sredina izotropna i homogena. Varijable koje promatramo su zasićenja dvaju fluida, s_1 i s_2 koje imaju vrijednosti između 0 i 1 i zadovoljavaju $s_1 + s_2 = 1$, brzine $\vec{q_1}$ i $\vec{q_2}$ i tlakovi p_1 i p_2.

Osnovne jednadžbe za nemješivi tok su zakoni sačuvanja mase i generalizacija Darcyjevog zakona. Zakoni sačuvanja mase glase:

$$\partial_t(\phi\rho_1 s_1) + \mathrm{div}(\rho_1\vec{q_1}) = 0, \tag{1.27}$$

$$\partial_t(\phi\rho_2 s_2) + \mathrm{div}(\rho_2\vec{q_2}) = 0. \tag{1.28}$$

Kako je $s_1 + s_2 = 1$, možemo staviti $s := s_1$ kao glavnu nepoznanicu i transformirati jednadžbe u

$$\phi\partial_t s + \mathrm{div}(\vec{q_1}) = 0, \tag{1.29}$$

$$\phi\partial_t(1-s) + \mathrm{div}(\vec{q_2}) = 0. \tag{1.30}$$

Zasićenje s_i predstavlja relativni udio i-tog fluida u pornom prostoru.

Darcyjev zakon u dvofaznom toku ima sljedeći oblik:

$$\vec{q_1} = -\frac{k}{\mu_1}k_{r1}(\nabla p_1 + \rho_1\vec{g}), \tag{1.31}$$

$$\vec{q_2} = -\frac{k}{\mu_2}k_{r2}(\nabla p_2 + \rho_2\vec{g}), \tag{1.32}$$

gdje su k_{r1}, k_{r2} relativne propusnosti faza, koje imaju sljedeća svojstva:

$$k_{r1} = k_{r1}(s_1), \quad 0 \le k_{r1} \le 1,$$

$$k_{r2} = k_{r2}(s_2), \quad 0 \le k_{r2} \le 1.$$

Obje funkcije su rastuće u pripadnim zasićenjima i moguće ih je izraziti kao funkcije od zasićenja s. One modeliraju činjenicu da prisutnost jednog fluida ometa u gibanju drugi fluid.

Imamo i ovisnost među tlakovima danu kao posljedicu mikroskopskih kapilarnih efekata koja ima oblik

$$p_2 - p_1 = p_c(s). \tag{1.33}$$

Kao i k_{r1}, k_{r2}, funkcija p_c se određuje eksperimentalno ili modeliranjem. Pretpostavljamo da za ukupni tok vrijedi $\vec{q_1} + \vec{q_2} = 0$, što je prirodna pretpostavka kod imbibicijskih procesa. Ta pretpostavka nam omogućuje da gradijent tlaka ∇p_1 izrazimo preko gradijenta funkcije kapilarnog tlaka $\nabla(p_c(s))$. Nadalje zanemarujemo efekte gravitacije. Imamo:

$$\begin{aligned} 0 &= -k(\frac{k_{r1}}{\mu_1}\nabla p_1 + \frac{k_{r2}}{\mu_2}\nabla p_2) \\ &= -k((\frac{k_{r1}}{\mu_1} + \frac{k_{r2}}{\mu_2})\nabla p_1 + \frac{k_{r2}}{\mu_2}\nabla(p_c(s))). \end{aligned}$$

Stoga je

$$\nabla p_1 = -\frac{k_{r2}}{\mu_2}\frac{\mu_1}{k_{r1}+\frac{\mu_1}{\mu_2}k_{r2}}\nabla(p_c(s)). \tag{1.34}$$

Uvrštavanjem toga u jednadžbu za s dobivamo

$$\begin{aligned} \partial_t s &= \operatorname{div}(\Phi'(s)\nabla s) && (1.35)\\ &= \Delta(\Phi(s)), && (1.36)\end{aligned}$$

gdje je

$$\Phi(s) = \frac{k}{\mu_2\phi}\int_0^s \frac{k_{r1}k_{r2}}{k_{r1}+\frac{\mu_1}{\mu_2}k_{r2}}p_c'(\xi)d\xi. \tag{1.37}$$

Time ponovo dolazimo do generalizirane JPS.

Poglavlje 2

Primjeri rješenja

U ovom poglavlju ćemo se baviti nekim specijalnim tipovima rješenja na kojima vidimo svojstva tipična za jednadžbu porozne sredine. Pritom ćemo, uz jednadžbu porozne sredine:

$$\partial_t u = \Delta(u^m), \tag{2.1}$$

razmatrati i jednadžbu porozne sredine s predznakom:

$$\partial_t u = \Delta(|u|^m \operatorname{sign}(u)). \tag{2.2}$$

2.1 Neka jednostavna rješenja

Jednadžba porozne sredine ima nekoliko analitičkih rješenja koja igraju bitnu ulogu u razvijanju teorije. Najjednostavniji primjer rješenja su ona koja ne ovise o vremenu. Takva rješenja zovemo **stacionarna rješenja** i za njih vrijedi uvjet $\partial_t u = 0$. Stoga su ta rješenja funkcije samo prostorne varijable $u = u(x)$ pa funkcija $w := u^m$ mora zadovoljavati jednadžbu:

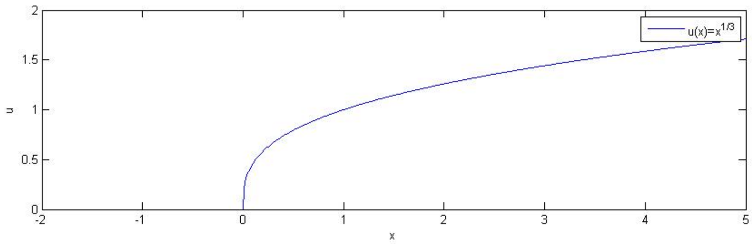
$$\Delta w = 0.$$

Dakle, svaka harmonička funkcija $w(x)$ daje jedno stacionarno rješenje jednadžbe uz $u(x) = w(x)^{\frac{1}{m}}$, ako vrijedi $w \geq 0$. Ukoliko promatramo jednadžbu s predznakom, možemo staviti $u(x) := |w(x)|^{\frac{1}{m}} \operatorname{sign}(w)$. Tada je, zbog $\operatorname{sign}(u) = \operatorname{sign}(w)$,

$$|u|^m \operatorname{sign}(u) = ||w(x)|^{\frac{1}{m}} \operatorname{sign}(w)|^m \operatorname{sign}(u) = |w(x)| \operatorname{sign}(w) = w(x),$$

pa je u rješenje jednadžbe s predznakom. Međutim, ako tražimo rješenja koja su definirana i nenegativna na cijelom prostoru tada ta rješenja moraju biti konstante. Ta činjenica slijedi iz svojstava harmoničkih funkcija, posebno formula srednje vrijednosti. Takva rješenja zovemo **trivijalna rješenja** i to su najjednostavnija rješenja.

Promotrimo situaciju u jednoj dimenziji, gdje stacionarna rješenja dobijemo iz $\frac{\partial^2}{\partial x^2} w = 0$. Rješenje je oblika: $u^m = Ax + B$, gdje za $A \neq 0$ dobivamo netrivijalna rješenja. Pritom se moramo svesti na dio prostora gdje je $w(x) = Ax + B \geq 0$, kako bi $u = (Ax + B)^{\frac{1}{m}}$ imalo smisla.



Slika 2.1: Specijalno rješenje jednadžbe (2.1) za $m = 3$

Restrikcija $Ax + B \geq 0$ nije nužna ako promatramo rješenja s predznakom $u(x) = |w(x)|^{\frac{1}{m}} \operatorname{sign}(w)$, ali tad se moramo brinuti o konceptu rješenja u prijelaznoj točki $Ax+B = 0$.

2.2 Separacija varijabli

Za naš prvi model netrivijalnog specijalnog rješenja koristimo Fourierov pristup. Naime, pokušajmo potražiti rješenje u separiranom obliku:

$$u(x, t) = T(t)F(x). \tag{2.3}$$

Ovaj pristup će nas dovesti do separiranih jednadžbi za funkciju $T(t)$ koju nazivamo **vremenski faktor** i $F(x)$ koju zovemo **prostorni profil**. Uvrštavanjem tog specijalnog oblika u jednadžbu dobivamo:

$$\partial_t(T(t)F(x)) = \Delta(T(t)^m F(x)^m),$$

što vodi na

$$T'(t)F(x) = T(t)^m \Delta(F^m(x)).$$

Tako dolazimo do dvije jednadžbe:

$$T'(t) + \lambda T(t)^m = 0, \quad \Delta(F^m(x)) + \lambda F(x) = 0,$$

gdje je $\lambda \in \mathbb{R}$ proizvoljna konstanta. Pretpostavit ćemo da $\lambda \neq 0$, jer se u suprotnom vraćamo opet na stacionarna rješenja.

Prva jednadžba se lako rješava integracijom:

$$-\lambda t + C = \int \frac{1}{T^m} dT = \frac{1}{1-m} T^{1-m},$$

iz čega slijedi

$$T(t) = (C + (m-1)\lambda t)^{\frac{-1}{m-1}}.$$

Sveli smo traženje ovakvih rješenja na rješavanje nelinearne eliptičke jednadžbe za F:

$$\Delta(F^m(x)) + \lambda F(x) = 0. \tag{2.4}$$

Proces rješavanja je sličan kao i za jednadžbu provođenja. Odabere se domena Ω, zadaju se rubni uvjeti na $\partial\Omega$ i riješi se rubni problem. Rezultati, međutim, ovise o predznaku od λ.

Pozitivan λ

Zanimljivo svojstvo ovog nelinearnog svojstvenog problema je da se primjerenom zamjenom funkcije F problem s općim $\lambda > 1$ može svesti na $\lambda = 1$. Naime, ako je F_1 rješenje jednadžbe za $\lambda = 1$:

$$\Delta(F_1^m(x)) + F_1(x) = 0, \tag{2.5}$$

tada uvodimo transformaciju

$$F(x) = \lambda^{\frac{1}{m-1}} F_1(x).$$

Sad imamo:

$$\Delta(F^m(x)) = \Delta(\lambda^{\frac{m}{m-1}} F_1^m(x)) = \lambda^{\frac{1}{m-1}+1}\Delta(F_1^m(x)) = -\lambda^{\frac{1}{m-1}+1}F_1(x) = -\lambda F(x).$$

Ovo svojstvo nemaju linearni svojstveni problemi sličnog tipa.

Korisno je promijeniti varijablu F u $G = F^m$, čime dobivamo nelinearnu eliptičku jednadžbu:

$$\Delta G(x) + G^p(x) = 0, \quad p = 1/m \in \langle 0, 1\rangle. \tag{2.6}$$

Ovu jednadžbu možemo postaviti u ograničenoj domeni s regularnom granicom i homogenim Dirichletovim rubnim uvjetima. U slučaju da domena Ω ima poseban oblik, poput kugle ili kocke, rješenje se može dobiti standardnim metodama za rješavanje ODJ-ova.

Uzmimo da je $\Omega = K(0, R)$ i riješimo jednadžbu (2.6), gdje za G pretpostavljamo da je radijalno simetrična, odnosno:

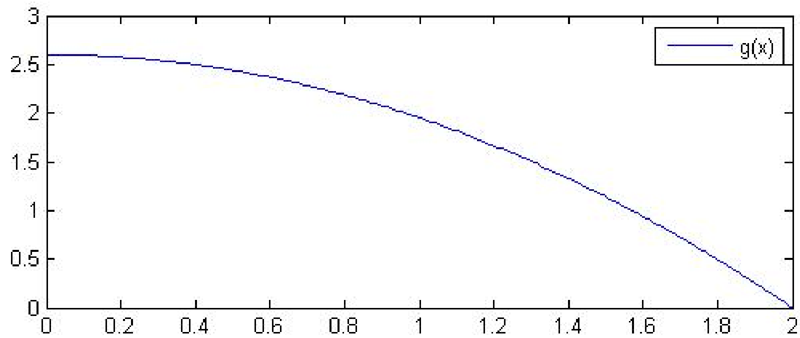
$$G(x) = g(|x|) = g(r).$$

Jednadžba (2.6) se u tom slučaju svodi na nelinearni ODJ za $g(r)$:

$$g''(r) + \frac{d-1}{r}g'(r) + g^p(r) = 0, \quad p = 1/m, \quad r \in [0, R], \quad R > 0. \tag{2.7}$$

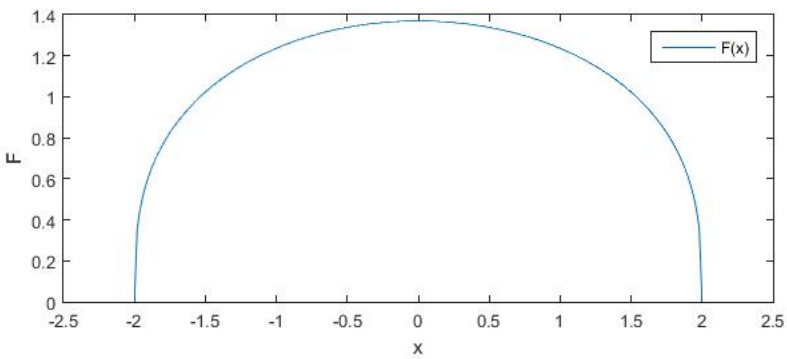
Jednadžbi još dodajemo rubne uvjete $g'(0) = 0, g(R) = 0$. Ova obična diferencijalna jednadžba se može aproksimirati diskretizacijom konačnim diferencijama te rješavanjem sustava nelinearnih algebarskih jednadžbi dobivenih diskretizacijom.

Kao primjer rješavamo zadaću u 1D. Za rješavanje nelinearnog sustava koristimo MATLAB-ovu funkciju fsolve().



Slika 2.2: Rješenje jednadžbe (2.7) za $R = 2$ i $m = 3$

Iz tog rješenja možemo rekonstruirati $F(x) = G(x)^{1/m}$:

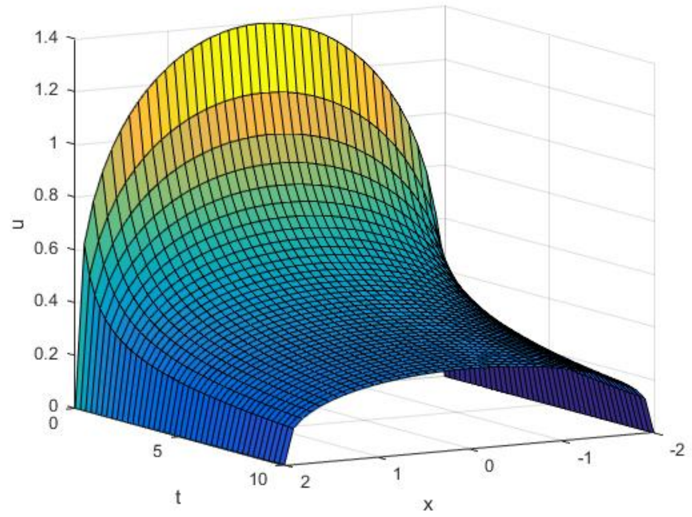


Slika 2.3: Rješenje jednadžbe (2.4) za $R = 2$, $m = 3$ i $d = 1$

Problem se prilično razlikuje od linearnog svojstvenog problema: imamo egzistenciju i jedinstvenost pozitivnog rješenja za sve $\lambda > 0$. Napominjemo još da je rješenje klase $C(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$.

Uz dano rješenje $F(x, \lambda, \Omega)$, poluekplicitna forma rješenja porozne sredine danog u separiranom obliku ima oblik

$$u(x,t) = (C + (m-1)\lambda t)^{-1/(m-1)} F(x) \tag{2.8}$$



Slika 2.4: Rješenje jednadžbe (2.1) u separiranom obliku

Negativan λ

U ovom slučaju dobivamo rješenja s vremenskim faktorom

$$T(t) = (C - (m-1)lt)^{-1/(m-1)}, \quad l = -\lambda > 0.$$

Ta funkcija, međutim, eksplodira u konačnom vremenu $t = \frac{C}{(m-1)l} > 0$.
Eliptičku jednadžbu za prostorni profil više ne možemo riješiti u postavkama kao ranije i dobiti netrivijalna rješenja. Međutim, možemo lako dobiti radijalno simetrična rješenja definirana na cijelom prostoru.

Kao i ranije, promijenit ćemo varijablu F u $G = F^m$, čime nelinearna eliptička jednadžba postaje:

$$\Delta G(x) + \lambda G^p(x) = 0, \quad p = 1/m \in \langle 0, 1 \rangle. \tag{2.9}$$

Pretpostavimo sada da je rješenje oblika

$$G(x) = |x|^\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo:

$$\begin{aligned}\Delta G(x) &= \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i x_i}(|x|^\gamma)\\ &= \sum_{i=1}^{d}[\gamma(\gamma-1)|x|^{\gamma-2}\frac{x_i^2}{|x|^2}+\gamma|x|^{\gamma-1}(\frac{1}{|x|}-\frac{x_i^2}{|x|^3})]\\ &= \gamma(\gamma+d-2)|x|^{\gamma-2}.\end{aligned}$$

Jednadžba sad glasi:

$$\gamma(\gamma+d-2)|x|^{\gamma-2}+\lambda|x|^{p\gamma}=0.$$

Prvo odabiremo γ za kojeg vrijedi

$$\gamma-2=p\gamma, \quad \text{što daje} \quad \gamma:=\frac{2}{1-p}.$$

Uz taj odabir dobivamo izraz za λ :

$$\lambda=-\gamma(\gamma+d-2).$$

Dakle, funkcija $G(x)=|x|^{\frac{2}{1-1/m}}$ rješava jednadžbu (2.9), za $\lambda=-\gamma(\gamma+d-2)$, gdje je $\gamma=\frac{2}{1-1/m}$. Stoga $F_\lambda(x)=|x|^{\frac{2}{m-1}}$ rješava jednadžbu (2.4).

Skaliranjem kao ranije, dobivamo formulu za rješenje jednadžbe za proizvoljni $\lambda<0$.

2.3 Putujući valovi

U ovom dijelu tražimo rješenja u obliku:

$$u=f(\eta), \eta=x_i-ct\in\mathbb{R}. \tag{2.10}$$

Ovaj tip rješenja reprezentira val koji se giba u vremenu duž osi x_i. Parametar c se zove **valna brzina** i za njega pretpostavljamo da vrijedi $c\neq 0$, jer u suprotnom dobivamo opet stacionarna rješenja. Bez smanjenja općenitosti pretpostavljamo da je $c>0$. Također, kako je jednadžba invarijatna na rotacije, mogli bismo za bilo koji smjer $\vec{n}$ naći rješenje tipa $f(x\cdot\vec{n}-ct)$.

Fiksiramo sad $c>0$ i uvrstimo (2.10) u jednadžbu $u_t=\Delta(u^m)$:

$$u_t=-cf'(x_i-ct),$$

$$\Delta(u^m) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(u^m) = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(f^m(x_i - ct)) = (f^m(x_i - ct))''.$$

Time dolazimo do jednadžbe

$$(f^m)'' + cf' = 0, \tag{2.11}$$

koju možemo jednom integrirati kako bi dobili

$$(f^m)' + cf = K, \tag{2.12}$$

gdje je $K \in \mathbb{R}$ proizvoljna integracijska konstanta.
Ovu konstantu odabiremo na način da pretpostavimo da se val kojeg promatramo propagira u prazno područje. Točnije, želimo da za velike η vrijedi $f(\eta) = f'(\eta) = 0$. Ta pretpostavka nas vodi na zaključak da je $K = 0$.
Sad deriviranjem kompozicije dobivamo jednadžbu:

$$mf^{m-2}f' + c = 0. \tag{2.13}$$

Ovu jednadžbu jednostavno riješimo separiranjem varijabli pa nam rješenje, nakon integriranja, zadovoljava:

$$\frac{m}{m-1}f^{m-1} = -c\eta + K_1, \tag{2.14}$$

gdje je K_1 integracijska konstanta. Ona se, međutim, može zamijeniti izrazom $K_1 = c\eta_0$ čime gornja jednadžba poprima kompaktniji oblik:

$$\frac{m}{m-1}f^{m-1} = c(\eta_0 - \eta). \tag{2.15}$$

Prema našoj definiciji matematičkog tlaka, to znači da je tlak linearna funkcija:

$$v(x,t) = c(x_0 - x + ct). \tag{2.16}$$

Ovo nam daje klasično rješenje JPS-a, ali samo u području $\{(x,t) : x - ct < x_0\}$, gdje je v pozitivno.

Na tom skupu imamo formulu za rješenje:

$$u(x,t) = (\frac{m-1}{m}c(x_0 - x + ct))^{\frac{1}{m-1}}. \tag{2.17}$$

Formula (2.17), na žalost, ne daje rješenje na cijelom prostoru, a to je prirodno okruženje za putujuće valove. Za $x - ct > x_0$ tlak $v(x,t)$ postaje negativan, a ta se situacija kosi s fizikom. Način na koji se nosimo s ovom poteškoćom je napuštanje koncepta klasičnog rješenja. U stvari je ideja prilično prirodna i oslanja se na strategiju prelaska na limes aproksimirajućih rješenja.

Naime, riješit ćemo problem u postavkama u kojima nema poteškoća, pustit ćemo limes i promotriti dobiveni rezultat.

Vraćamo se na jednadžbu (2.12) i odbacujemo pretpostavku o ponašanju vala. Umjesto toga, postavljamo set uvjeta kojima osiguravamo dobro ponašanje rješenja i kojima aproksimiramo uvjete o praznom prostoru. Ti uvjeti glase:

$$f(\infty) = \epsilon, \quad f'(\infty) = 0, \quad \epsilon > 0,$$

i shvaćamo ih u smislu limesa.

Tako dobivamo da za K vrijedi:

$$K = mf^{m-1}(\eta)f'(\eta) + cf(\eta) = \lim_{\eta\to\infty}(mf^{m-1}(\eta)f'(\eta) + cf(\eta)) = c\epsilon.$$

Uvrštavanjem tog K u jednadžbu (2.12) dobivamo aproksimirajuću jednadžbu:

$$f' = -c\frac{f-\epsilon}{mf^{m-1}}, \quad \epsilon > 0. \tag{2.18}$$

Propozicija 2.3.1. *Za svaki $\epsilon \in \langle 0, 1\rangle$ postoji jedinstveno rješenje $f_\epsilon(\eta)$ jednadžbe* (2.18) *koje zadovoljava početni uvjet $f_\epsilon(0) = 1$ i rubni uvjet $f_\epsilon(\infty) = \epsilon$. Nadalje, $f_\epsilon : \mathbb{R} \to \langle \epsilon, \infty\rangle$ je monotono padajuća C^∞ funkcija takva da je $f_\epsilon(-\infty) = \infty$. Na limesu imamo:*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{m}{m-1}f_\epsilon^{m-1}(\eta) = c(\eta_0 - \eta)_+,$$

uniformno po skupovima $[a, \infty\rangle$

Dokaz. Izvedimo formulu za $\eta_\epsilon = \eta_\epsilon(f)$:

$$\eta_\epsilon'(f) = \frac{1}{f'(\eta_\epsilon)} = -\frac{m}{c}\frac{f^{m-1}}{f-\epsilon},$$

gdje smo u drugoj jednakosti upotrijebili diferencijalnu jednadžbu za f. Integracijom dobivamo:

$$\eta_\epsilon(f) = -\frac{m}{c}\int_1^f \frac{h^{m-1}}{h-\epsilon}dh. \tag{2.19}$$

Uz ovaj odabir donje granice, jasno vrijedi da je $\eta(1) = 0$.
Kako je $\epsilon \in \langle 0, 1\rangle$, imamo:

$$\begin{aligned}
\eta_\epsilon(\epsilon) &= -\frac{m}{c}\int_1^\epsilon \frac{h^{m-1}}{h-\epsilon}dh \\
&= \frac{m}{c}\int_\epsilon^1 \frac{h^{m-1}}{h-\epsilon}dh \\
&\geq \frac{m}{c}\epsilon^{m-1}\int_\epsilon^1 \frac{1}{h-\epsilon}dh \\
&= \frac{m}{c}\epsilon^{m-1}\ln(f-\epsilon)\Big|_\epsilon^1 = +\infty.
\end{aligned}$$

Nadalje, za $f \geq \epsilon$:

$$\begin{aligned}
\eta_\epsilon(f) &= -\frac{m}{c}\int_1^f \frac{h^{m-1}}{h-\epsilon}dh \\
&\leq -\frac{m}{c}\int_1^f \frac{h^{m-1}}{h}dh \\
&= -\frac{m}{c}\int_1^f h^{m-2}dh \\
&= -\frac{m}{c(m-1)}h^{m-1}\Big|_1^f \to -\infty, \text{ kad } f \to \infty.
\end{aligned}$$

Još imamo da je za $f > \epsilon$,

$$\eta'_\epsilon(f) = -\frac{m}{c}\frac{f^{m-1}}{f-\epsilon} < 0,$$

pa zaključujemo da je η_ϵ neprekidna padajuća bijekcija sa $\langle\epsilon, \infty\rangle$ u $\mathbb{R}$. Stoga za f_ϵ vrijedi da je monotono padajuća bijekcija s $\mathbb{R}$ u $\langle\epsilon, \infty\rangle$.

Sljedeće pokazujemo da na skupovima oblika $[\frac{1}{a}, a]$ imamo uniformnu konvergenciju prema rješenju jednadžbe:

$$\eta'(f) = -\frac{m}{c}f^{m-2}.$$

Neka je $a > 0$. Za dovoljno mali ϵ je $\epsilon < \frac{1}{a}$.

Neka je $f \in [\frac{1}{a}, a]$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $f \geq 1$. Računamo:

$$\begin{aligned}
|\eta_\epsilon(f) - \eta(f)| &= |-\frac{m}{c}\int_1^f \frac{h^{m-1}}{h-\epsilon}dh + \frac{m}{c}\int_1^f h^{m-2}dh| \\
&= \frac{m}{c}|\int_1^f (h^{m-2} - \frac{h^{m-1}}{h-\epsilon})dh| \\
&\leq \frac{m}{c}\int_1^f |h^{m-2} - \frac{h^{m-1}}{h-\epsilon}|dh \\
&\leq \frac{m}{c}a \max_{h\in[1,a]} |h^{m-2} - \frac{h^{m-1}}{h-\epsilon}| \to 0, \text{ kad } \epsilon \to 0.
\end{aligned}$$

Kako zadnji izraz nije ovisio o f vidimo da se radi o uniformnoj konvergenciji. Treba još zaključiti tvrdnju propozicije:

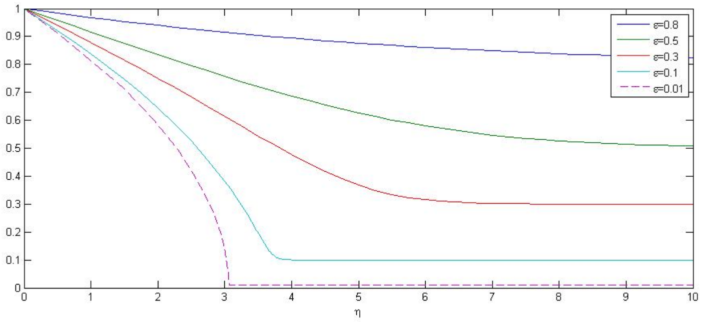
Neka je $0 < a < 1$. Tada na skupu $[a, \frac{1}{a}]$ imamo uniformnu konvergenciju $\eta_\epsilon \to \eta$. To, međutim, znači da

$$\forall\delta > 0, \exists\varepsilon_0 > 0, \text{takav da } (\varepsilon < \varepsilon_0) \implies |\eta_\varepsilon(f) - \eta(f)| < \delta, \forall f \in [a, \frac{1}{a}].$$

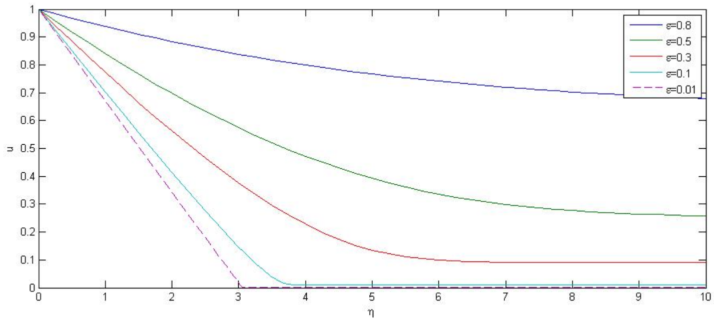
Odabiremo δ takav da je $\eta(a) + \delta = \frac{m}{m-1}\frac{1}{c} = \max_{[0,+\infty\rangle} \eta$. Za $\eta > \frac{m}{m-1}\frac{1}{c} = \eta(a) + \delta$ je tada $f_\varepsilon(\eta) \leq a$, čim je $\varepsilon < \varepsilon_0$. Kako taj zaključak vrijedi za svaki $0 < a < 1$, na limesu dobivamo $f(\eta) = 0$, za $\eta \geq \frac{m}{m-1}\frac{1}{c}$ i radi se o uniformnoj konvergenciji na $[\frac{m}{m-1}\frac{1}{c}, \infty\rangle$. Za $\eta \in \langle -\infty, \frac{-m}{m-1}\frac{1}{c}]$ imamo da je $\frac{m}{m-1}f(\eta) = c(\frac{m}{m-1} - \eta)$.

□

Metodama za rješavanje autonomnih diferencijalnih jednadžbi možemo riješiti diferencijalnu jednadžbu (2.18) i rekonstruirati putujuće valove.



Slika 2.5: Rješenja jednadžbe (2.18) za različite ϵ.



Slika 2.6: Profili matematičkog tlaka

Prethodna propozicija nam daje formulu za tlak:

$$v(x,t) = c(x_0 - x + ct)_+. \tag{2.20}$$

S obzirom da smo to rješenje dobili kao granično rješenje niza klasičnih rješenja, smatramo ga fizikalno relevantnim rješenjem. Primjećujemo da ovo granično rješenje nije klasično rješenje JPS-a. Ono ima problem sa diferencijabilnosti na granici $x - ct = x_0$. Taj skup nazivamo **slobodna granica** i to će biti važan objekt naše pažnje.

Promatrajući putujuće valove primjećujemo neke bitne razlike između JPS-a i jednadžbe provođenja. Putujući valovi za jednadžbu provođenja imaju oblik:

$$u(x,t) = Ce^{c(ct-x)}. \tag{2.21}$$

To su klasična rješenja jednadžbe koja su pozitivna u svakoj točki domene u svakom trenutku. Pokazuju, dakle, svojstva beskonačne brzine širenja, koja smatramo nefizikalnim. S druge strane, putujući valovi koje smo konstruirali imaju oštar front koji separira područja $\{u > 0\}$ i $\{u = 0\}$ i koji se propagira konačnom brzinom. To svojstvo je jedno od glavnih svojstava JPS-a i predstavlja fizikalno relevantan model.

2.4 Izvorna rješenja

U sljedećem primjeru tražimo rješenje JPS-a koje odgovara toku koji kreće iz konačne mase koncetrirane u jednoj točki prostora, npr $x = 0$. U matematičkim terminima, tražimo rješenje za koje vrijedi:

$$u(x,0) = M\delta_0(x).$$

Takav tip rješenja se zove **izvorno rješenje**, odnosno **fundamentalno rješenje**.

Rješenje tog tipa je dobro poznato u slučaju jednadžbe provođenja i dano je eksplicitno formulom:

$$E(x,t) = \frac{M}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Ovo rješenje igra veliku ulogu u razvijanju teorije za jednadžbu provođenja pa nas ta činjenica motivira da pokušamo naći fundamentalno rješenje za našu nelinearnu difuzijsku jednadžbu JPS.

Srećom, izvorno rješenje postoji za svaki $m > 1$ i dano je eksplicitno formulom:

$$\mathcal{U}(x,t) = \frac{1}{t^\alpha} F(xt^{\frac{-\alpha}{d}}), \quad F(\xi) = (C - \kappa|\xi|^2)_+^{\frac{1}{m-1}}, \tag{2.22}$$

gdje je:

$$\alpha = \frac{d}{d(m-1)+2}, \quad \kappa = \frac{(m-1)\alpha}{2md}.$$

Ovo rješenje se još naziva **Barenblattovo rješenje**. Možemo ga izvesti potražimo li rješenje JPS-a $u_t = \Delta(u^m)$ u obliku

$$u(x,t) = \frac{1}{t^\alpha} F(\frac{|x|^2}{t^\beta}), \tag{2.23}$$

gdje su β, α za sad nepoznati parametri, a F je nepoznata funkcija. Ovakva forma rješenja se zove **sebi-slična forma**, eksponenti α i β se zovu **eksponenti sličnosti**, a funkcija F se zove **sebi-sličan profil**. Potrebno je odrediti eksponente i profil kako bi rezultirajuća funkcija bila rješenje i usput zadovoljavala neke dodatne uvjete.

Računamo potrebne derivacije:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} F(\frac{|x|^2}{t^\beta}) - \frac{\beta}{t^{\alpha+1}} F'(\frac{|x|^2}{t^\beta}) \frac{|x|^2}{t^\beta},$$

$$\frac{\partial (u^m)}{\partial x_i}(x,t) = \frac{1}{t^{\alpha m}} (F^m)'(\frac{|x|^2}{t^\beta}) \frac{2x_i}{t^\beta},$$

$$\frac{\partial^2 (u^m)}{\partial x_i^2}(x,t) = \frac{1}{t^{\alpha m}} (F^m)''(\frac{|x|^2}{t^\beta}) \frac{4x_i^2}{t^{2\beta}} + \frac{1}{t^{\alpha m}} (F^m)'(\frac{|x|^2}{t^\beta}) \frac{2}{t^b},$$

$$\Delta(u^m(x,t)) = \frac{4}{t^{\alpha m+\beta}} \frac{|x|^2}{t^\beta} (F^m)''(\frac{|x|^2}{t^\beta}) + \frac{2d}{t^{\alpha m+\beta}} (F^m)'(\frac{|x|^2}{t^\beta}).$$

Uvodimo zamjenu varijabli $\xi = \frac{|x|^2}{t^\beta}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} F(\xi) - \frac{\beta}{t^{\alpha+1}} F'(\xi)\xi,$$

$$\Delta(u^m) = \frac{4}{t^{\alpha m+\beta}}\xi(F^m)''(\xi) + \frac{2d}{t^{\alpha m+\beta}}(F^m)'(\xi),$$

kojom uvrštavanjem u JPS dobivamo:

$$\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}F(\xi) + \frac{\beta}{t^{\alpha+1}}F'(\xi)\xi + \frac{4}{t^{\alpha m+\beta}}\xi(F^m)''(\xi) + \frac{2d}{t^{\alpha m+\beta}}(F^m)'(\xi) = 0.$$

Prvi zahtjev kojeg zadajemo je : $\alpha + 1 = \alpha m + \beta$. Tim zahtjevom eliminiramo ovisnost o vremenu u jednadžbi, pretvarajući je u:

$$\alpha F(\xi) + \beta F'(\xi)\xi + 4\xi(F^m)''(\xi) + 2d(F^m)'(\xi) = 0. \tag{2.24}$$

Nadalje, htjeli bismo imati sačuvanje mase. Odnosno, htjeli bismo da vrijedi:

$$\int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{U}(x,t)dx = \text{const, za sve } t > 0.$$

Izračunajmo taj integral:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{U}(x,t)dx &= \frac{1}{t^\alpha}\int_{\mathbb{R}^d} F(\frac{|x|^2}{t^\beta})dx \\
&= \frac{1}{t^\alpha}\int_0^\infty \int_{S(0,r)} F(\frac{|x|^2}{t^\beta})dS_x dr \\
&= \frac{1}{t^\alpha}\int_0^\infty \int_{S(0,1)} r^{d-1}F(\frac{|y|^2 r^2}{t^\beta})dS_y dr \\
&= \frac{1}{t^\alpha}\int_0^\infty r^{d-1}\int_{S(0,1)} F(\frac{r^2}{t^\beta})dS_y dr \\
&= |S(0,1)|\frac{1}{t^\alpha}\int_0^\infty r^{d-1}F(\frac{r^2}{t^\beta})dr \\
&= |S(0,1)|\frac{t^{\frac{\beta d}{2}}}{t^\alpha}\int_0^\infty z^{d-1}F(z^2)dz.
\end{aligned}$$

U trećem redu smo napravili zamjenu varijabli $x = yr$, dok smo u zadnjem redu napravili zamjenu varijabli $z = \frac{r}{t^{\beta/2}}$.

Jasno je da je gornji integral neovisan o vremenu ako je $\frac{\beta d}{2} = \alpha$. Sad možemo riješiti sustav jednadžbi koji će nam otkriti α i β:

$$\alpha + 1 = \alpha m + \beta, \quad \beta d = 2\alpha.$$

Rješenja tog sustava su:

$$\alpha = \frac{d}{d(m-1)+2}, \quad \beta = \frac{2}{d(m-1)+2}.$$

Vraćamo se sad na jednadžbu (2.24) i uvrstimo $\alpha = \beta d/2$:

$$\begin{aligned}
\beta[\frac{d}{2}F(\xi) + \xi F'(\xi)] + 4[\xi(F^m)''(\xi) + \frac{d}{2}(F^m)'(\xi)] = 0 \quad &\Big/ \xi^{d/2-1} \\
\beta[\frac{d}{2}\xi^{d/2-1}F(\xi) + \xi^{d/2}F'(\xi)] + 4[\xi^{d/2}(F^m)''(\xi) + \frac{d}{2}\xi^{d/2-1}(F^m)'(\xi)] = 0 & \\
\beta(\xi^{d/2}F(\xi))' + 4(\xi^{d/2}(F^m)'(\xi))' = 0 \quad &\Big/ \int d\xi \\
\beta\xi^{d/2}F(\xi) + 4\xi^{d/2}(F^m)'(\xi) = C, &
\end{aligned}$$

gdje je C integracijska konstanta. Želimo da rješenje brzo trne u 0 kad $\xi \to \infty$ pa zato uzimamo $C = 0$.

Došli smo do jednadžbe:

$$\beta F(\xi) + 4(F^m)'(\xi) = 0,$$

koju smo sad sposobni riješiti. Deriviramo izraz u zagradi i dođemo do oblika kojeg možemo integrirati:

$$\beta + 4mF^{m-2}F' = 0.$$

Nakon rješavanja dolazimo do konačnog oblika funkcije F:

$$F(\xi) = (c - \frac{(m-1)\beta}{4m}\xi)^{\frac{1}{m-1}},$$

gdje je c konstanta integracije.

Problem koji se javlja je taj što gornji izraz ima smisla samo tamo gdje je izraz u zagradi nenegativan. Međutim, spas tražimo u Propoziciji 2.3.1 koja nam daje formulu za granično rješenje:

$$F(\xi) = (c - \frac{(m-1)\alpha}{2md}\xi)_+^{1/(m-1)}. \tag{2.25}$$

Definiramo dalje $\kappa := \frac{(m-1)\alpha}{2md}$ i stavimo $F(\xi) = (C - \kappa\xi^2)_+^{1/(m-1)}$.
Tada je

$$\mathcal{U}(x,t) = \frac{1}{t^\alpha}F(\frac{|x|}{t^{\beta/2}}) = \frac{1}{t^\alpha}F(\frac{|x|}{t^{\alpha/d}})$$

rješenje jednadžbe porozne sredine. Za njega vrijedi da je granično rješenje koje zadovoljava uvjet sačuvanja mase:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{U}(x,t)dx = const, t > 0.$$

Konstanta C se bira tako da zadamo masu M i tražimo da vrijedi:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{U}(x,t)dx = M. \tag{2.26}$$

Barenblattovo rješenje zadovoljava početni uvjet $\mathcal{U}(x,0) = M\delta_0(x)$ u smislu distribucija. Zaista, uzmimo proizvoljnu test funkciju φ iz prostora $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, pomnožimo funkciju $\mathcal{U}$ i prointegrirajmo po $\mathbb{R}^d$. Računamo:

$$|\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{U}(x,t)\varphi(x)dx - M\varphi(0)| \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{U}(x,t)[\varphi(x)-\varphi(0)]dx| = (*),$$

gdje smo u prvoj jednakosti iskoristili sačuvanje mase (2.26).

Međutim, kako je

$$\mathcal{U}(x,t) = \frac{1}{t^\alpha}\Big[C - \frac{(m-1)\alpha}{2md}\frac{|x|^2}{t^{2\alpha/d}}\Big]_+^{1/(m-1)},$$

onda je

$$\mathcal{U}(x,t) = 0 \quad \text{za} \quad C < \frac{(m-1)\alpha}{2md}\frac{|x|^2}{t^{2\alpha/d}},$$

tj. za

$$|x| > \sqrt{\frac{2Cmdt^{2\alpha/d}}{(m-1)\alpha}} =: R.$$

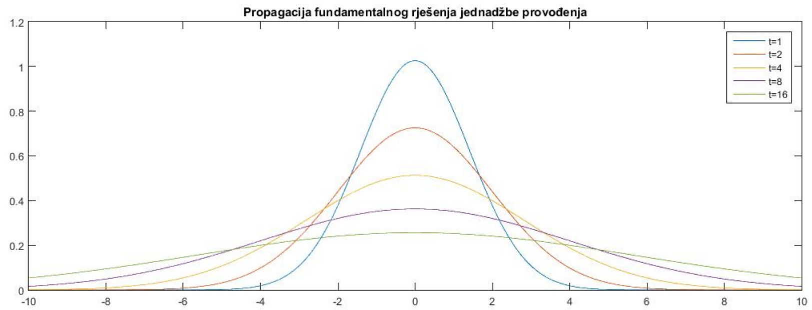
Sad imamo da je

$$\begin{aligned}
(*) \;&\leq\; \int_{K(0,R)} \frac{1}{t^\alpha}\Big[C - \frac{(m-1)\alpha}{2md}\frac{|x|^2}{t^{2\alpha/d}}\Big]_+^{1/(m-1)} |\varphi(x)-\varphi(0)|dx \\
&=\; \int_{K(0,1)} \frac{1}{t^\alpha}\Big[C - |y|^2\Big]_+^{1/(m-1)} |\varphi(\omega t^{2\alpha/d}y)-\varphi(0)|\omega^d t^\alpha dy, \quad \omega := \sqrt{\frac{2Cmd}{(m-1)\alpha}} \\
&=\; \omega^d \int_{K(0,1)} \Big[C - |y|^2\Big]_+^{1/(m-1)} |\varphi(\omega t^{2\alpha/d}y)-\varphi(0)|dy = (*),
\end{aligned}$$

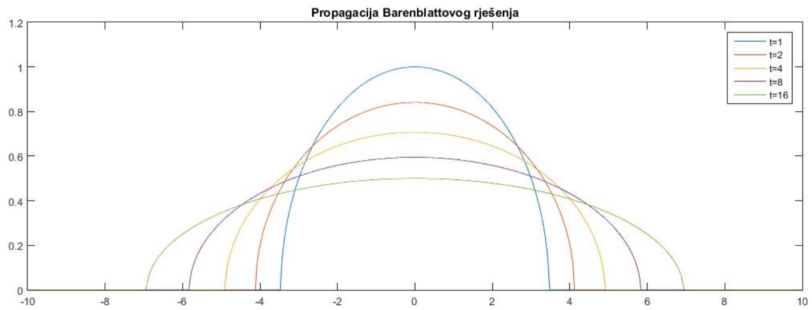
gdje smo u drugom redu uveli zamjenu varijabli:

$$x = \sqrt{\frac{2Cmdt^{2\alpha/d}}{(m-1)\alpha}}y, \quad dx = \Big(\frac{2Cmdt^{2\alpha/d}}{(m-1)\alpha}\Big)^{d/2}dy.$$

Primjetimo da je podintegralna funkcija neprekidna i integrabilna na $K(0,1)$ za svaki $t > 0$. Po točkama ide u 0, kad $t \to 0$ pa zaključujemo da $(*) \to 0$ kad $t \to 0$. Dakle $\mathcal{U}$ zadovoljava početni uvjet u smislu distribucija.
Kod Barenblattovog rješenja se jasno vide razlike između JPS i jednadžbe provođenja. Prvo, dok se rješenje JP-a propagira odmah u cijeli prostor, rješenje JPS-a ima omeđen nosač. Drugo, Fundamentalno rješenje JP-a je funkcija klase C^∞, dok je fundamentalno rješenje JPS-a samo Lipschitz neprekidno.



Slika 2.7: Fundamentalno rješenje jednadžbe provođenja



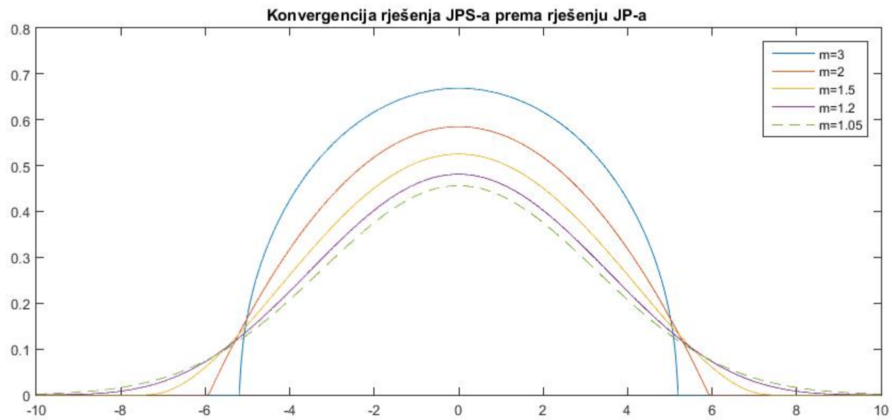
Slika 2.8: Fundamentalno rješenje jednadžbe porozne sredine

Primjetimo da za $m \to 1$ dobivamo točkovnu konvergenciju Barenblattovog rješenja u fundamentalno rješenje JP-a.

Ovi posebni tipovi rješenja nam daju dobar uvid u svojstva jednadžbe koju rješavamo.

Boussinesq-ova jednadžba

Ova jednadžba izlazi iz modela infiltracije vode kroz tlo i predstavlja dobar primjer za fizikalnu interpretaciju konačne brzine širenja. Radi se o posebnom slučaju JPS-a u kojem je $m = 2$:



Slika 2.9

$$h_t = \kappa\Delta(h^2). \tag{2.27}$$

Funkcija $h(x,t)$ predstavlja visinu vodnog lica na koordinati x u trenutku t. Jednadžba se u jednoj dimenziji postavlja na poluprostoru $\{x > 0\}$, uz rubne uvjete:

$$h(0,t) = h_0 > 0, \quad h(\infty, t) = 0.$$

Prvi rubni uvjet predstavlja infiltraciju vode na rubu koja odgovara konstantnoj visini, dok drugi uvjet predstavlja činjenicu da se voda giba prema praznom prostoru. Rješenje opet možemo potražiti u sebi-sličnom obliku (2.23). Međutim, da bi rješenje bilo kompatibilno s rubnim uvjetom, mora vrijediti da je $\alpha = 0$. Nadalje, iz zahtjeva $\alpha + 1 = \alpha m + \beta$ slijedi da je $\beta = 1$. Dakle, tražimo rješenje u obliku:

$$h(x,t) = f(\eta), \quad \eta = \frac{x^2}{t}, \tag{2.28}$$

Odnosno:

$$h(x,t) = g(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{t}}. \tag{2.29}$$

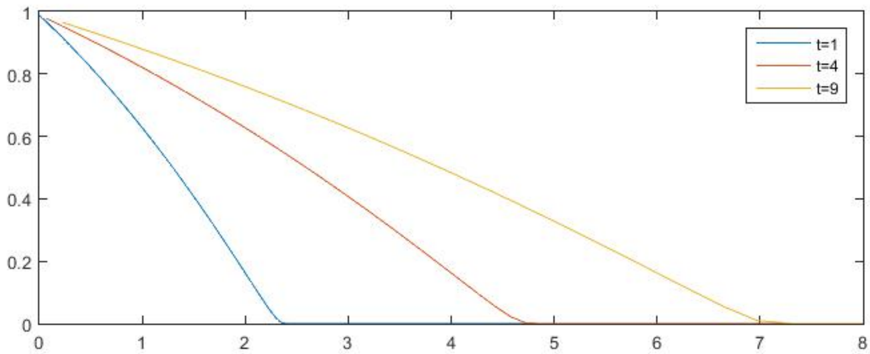
Računanjem derivacija i uvrštavanjem u Boussinesqu-ovu jednadžbu dobivamo ODJ za $g(\xi)$:

$$(g(\xi)^2)'' + \frac{1}{2}g'(\xi) = 0, \quad \xi \in \langle 0, \infty\rangle, \quad g(0) = H_0, \quad g(\infty) = 0. \tag{2.30}$$

Rješavanjem ovog ODJ-a dobivamo profil $g(\xi)$ pomoću kojeg možemo rekonstruirati

$$h(x,t) = g(\frac{x}{\sqrt{t}}).$$

.



Slika 2.10: Propagacija rješenja Boussinesq-ove jednadžbe (2.27)

Rješenje u svakom vremenu ima omeđen nosač što odgovara i fizikalnoj intuiciji.

Poglavlje 3

Svojstva i apriorne ocjene

U ovom poglavlju se bavimo svojstvima jednadžbe porozne sredine i ocjenama bitnim za razvoj teorije. Posebnu pažnju ćemo posvetiti **generaliziranoj jednadžbi porozne sredine**:

$$\partial_t u = \Delta(\Phi(u)) + f, \tag{3.1}$$

koja se još zove filtracijska jednadžba. Funkcija Φ se zove **funkcija nelinearnosti** i ovisno o potrebi ćemo navesti pretpostavke koje ćemo od nje zahtjevati da vrijede. Kako je jednadžba porozne sredine

$$\partial_t u = \Delta(u^m) \tag{3.2}$$

jedna kvazilinearna jednadžba paraboličkog tipa, navest ćemo neke osnovne činjenice o paraboličkim jednadžbama koje nam trebaju za nastavak teorije. Počinjemo sa korisnim svojstvima kvazilinearnih paraboličkih jednadžbi.

3.1 Kvazilinearne paraboličke jednadžbe

Definicija 3.1.1. *Za kvazilinearnu jednadžbu oblika*

$$\partial_t u = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, t, u, \nabla u) + b(x, t, u, \nabla u) \tag{3.3}$$

*kažemo da je **uniformno parabolička** ako vrijedi:*

Postoje konstante $0 < C_1 < C_2 < \infty$ takve da za svaki vektor $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$, vrijedi:

$$C_1|\xi|^2 \leq \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial a_i}{\partial p_j}(x, t, u, p)\xi_i\xi_j \leq C_2|\xi|^2, \quad \forall j \in \{1, \dots, d\}, \tag{3.4}$$

za sve vrijednosti parametara x, t, u i p.

U tom slučaju kažemo da je parcijalni diferencijalni operator

$$L(u) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, t, u, \nabla u) + b(x, t, u, \nabla u)$$

uniformno eliptičan.

U klasičnoj teoriji moramo zahtjevati da strukturalne funkcije a_i i b budu omeđene i glatke, klase C^∞.

Ukoliko uvažimo te pretpostavke dobivamo niz rezultata klasične teorije koje ćemo navesti bez dokaza i ubuduće koristiti kao poznate činjenice. Rezultati iz teorije kvazilinearnih paraboličkih jednadžbi su preuzeti iz knjige [2].

Teorem 3.1.2. *Neka je* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *i neka je zadana funkcija* $u_0 = u_0(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *klase* $C_b(\mathbb{R}^d)$*, odnosno omeđena i neprekidna. Tada Cauchyjeva zadaća za jednadžbu* (3.3) *uz početni uvjet* $u(x, 0) = u_0(x)$ *ima jedinstveno rješenje* $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \langle 0, \infty\rangle) \cap C(\mathbb{R}^d \times [0, \infty\rangle)$*. Ukoliko je* u_0 *samo omeđena onda se početni uvjet poprima u smislu konvergencije gotovo svuda.*

Teorem 3.1.3. *(Princip maksimuma za Cauchyjevu zadaću) Neka je* $u \in C^2_1(\mathbb{R}^d \times \langle 0, T]) \cap C(\mathbb{R}^d \times [0, T])$ *klasično rješenje jednadžbe* (3.3) *uz početni uvjet* $u(x, 0) = u_0(x)$*. Tada je*

$$\sup_{\mathbb{R}^d \times [0,T]} u = \sup_{\mathbb{R}^d} u_0.$$

Princip maksimuma nam, među ostalom, daje kao posljedicu da rješenja jednadžbe (3.3) imaju svojstvo beskonačne brzine širenja.

Teorem 3.1.4. *(Princip uspoređivanja) Neka su* $u = u(x, t)$ *i* $v = v(x, t)$ *dva klasična rješenja jednadžbe* (3.3) *koja su definirana i neprekidna na* $\mathbb{R}^d \times [0, T]$*,* $T > 0$*. Pretpostavimo da vrijedi* $u(x, 0) \le v(x, 0)$*. Tada vrijedi:*

$$u = v \text{ na } \mathbb{R}^d \times [0, T]$$

ili

$$u < v \text{ na } \mathbb{R}^d \times [0, T]$$

.

Možemo još promatrati i mješovite zadaće na cilindričnim domenama tipa $Q = \Omega \times \langle 0, T\rangle$ gdje je Ω omeđena domena u $\mathbb{R}^d$ s glatkim rubom. Na dijelu granice $\Sigma = \partial\Omega \times [0, T\rangle$ je tada potrebno zadati neki tip rubnih uvjeta. Takvi problemi se zovu inicijalno-rubni problemi i za njih također vrijede isti rezultati ukoliko su rubni i početni podaci međusobno kompatibilni.

Vraćamo se na primjer jednadžbe porozne sredine. Ukoliko promotrimo jednadžbu s predznakom, vidimo da pretpostavka o glatkoći propada jer je JPS jedan poseban slučaj jednadžbe tipa (3.3) gdje je $a_i(x, t, u, p) = m|u|^{m-1} p_i, i = 1 \dots d$. Naime:

$$\Delta(u^m) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(|u|^m) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} m(|u|^{m-1} \frac{\partial}{\partial x_i} u).$$

Međutim, najveći problem predstavlja **neuniformna paraboličnost** jednadžbe JPS jer je u općenitom slučaju, uvjet (3.4) moguće postići samo za $C_1 = 0$. Ovakav koncept paraboličnosti se još naziva **degenerirana paraboličnost** s obzirom da jednadžba mijenja karakter kad je $u = 0$. Fizikalna interpretacija je ta da difuzivnost postaje nula tamo gdje nema tvari koja sudjeluje u difuziji.

Teoreme klasične teorije i dalje možemo primjeniti uz neke dodatne pretpostavke. Potrebno je promatrati samo nedegenerirajuće početne podatke u_0 koji neće pokvariti uniformnu paraboličnost.

Teorem 3.1.5. *Neka je funkcija $u_0 = u_0(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ neprekidna i neka vrijedi*

$$\varepsilon \leq u_0(x) \leq 1/\varepsilon,$$

za neki $\varepsilon > 0$ i svaki $x \in \mathbb{R}^d$. Tada Cauchyjeva zadaća za jednadžbu (3.3) *uz početni uvjet $u(x, 0) = u_0(x)$ ima jedinstveno rješenje $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \langle 0, \infty\rangle) \cap C(\mathbb{R}^d \times [0, \infty\rangle)$, za koje vrijedi*

$$\varepsilon \leq u(x, t) \leq 1/\varepsilon$$

Ukoliko je u_0 samo omeđena onda se početni uvjet poprima u smislu konvergencije gotovo svuda.

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi:

$$\varepsilon \leq u_0(x) \leq 1/\varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Modificiramo koeficijente $a = mu^{m-1}p$ na sljedeći način: Za $\varepsilon \leq u(x, t) \leq 1/\varepsilon$ uzimamo $a = mu^{m-1}p$, a inače je proširimo kao linearnu funkciju od p, na način da prijelaz oko vrijednosti $u = \varepsilon$, $u = 1/\varepsilon$ bude gladak. Drugim riječima, definiramo funkciju $\hat{a}(x, t, u, p)$ na sljedeći način:

$$\hat{a}(x, t, u, p) := \Phi'(u)p,$$

gdje je, za $\varepsilon \leq u \leq 1/\varepsilon$, $\Phi(u) = u^m$. Za $u < \varepsilon$ i $1/\varepsilon < u$ uzimamo da je $\Phi(u) = Cu$, $C > 0$, gdje konstante C biramo na način da funkcija Φ bude rastuća i na prijelazu je izgladimo.

Na taj način smo promijenili problem u nalaženje rješenja modificirane jednadžbe

$$\partial_t = \Delta(\Phi(u)) = \operatorname{div}(\hat{a}(x, t, u, \nabla u)).$$

Kako je u ovom slučaju uklonjena degeneriranost, po Teoremu 3.1.2 dobivamo jedinstveno klasično rješenje u. Primjenom principa maksimuma dobivamo da vrijedi

$$\varepsilon \leq u(x, t) \leq 1/\varepsilon.$$

Međutim, kako u nikad ne poprima vrijednosti u perturbiranom dijelu funkcije Φ dobivamo klasično rješenje JPS-a. □

Ovaj teorem nam je dao neke dovoljne uvjete za egzistenciju i jedinstvenost klasičnog rješenja JPS-a. Na sličan način argumentiramo egzistenciju i jedinstvenost rješenja inicijalno rubnog problema. Naš glavni cilj je, međutim, postaviti teoriju egzistencije i jedinstvenosti generaliziranih rješenja JPS-a i generalizirane JPS sa što općenitijom funkcijom nelinearnosti Φ. Zbog toga ćemo uskoro napustiti pojam klasičnog rješenja i baviti se rješenjima koja jednadžbu zadovoljavaju u slabom smislu, tj u smislu distribucija.

Pritom se javljaju poteškoće koje uključuju: degeneriranost jednadžbe, općenitost nelinearnosti Φ i općenitost podataka na rubu.

Naš pristup u konstrukciji rješenja JPS i generalizirane JPS biti će aproksimacija nedegeneriranim problemima. Jedan pristup bi mogao biti aproksimacija problema generaliziranom JPS čija nelinearnost $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je C^2 glatka i

$$\Phi'(u) \geq C > 0, \forall u \in \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

Pod tim pretpostavkama imamo da vrijedi:

$$\partial_t u = \Delta(\Phi(u)) = \operatorname{div}(\Phi'(u)\nabla u),$$

pa su koeficijenti jednadžbe oblika:

$$a(x, t, u, p) = \Phi'(u)p, \ , p \in \mathbb{R}^d.$$

Kako je

$$\frac{\partial a_i}{\partial p_j} = \frac{\partial}{\partial p_j}(\Phi'(u)p_i) = \delta_{i,j},$$

izlazi da:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d \text{ je } \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial a_i}{\partial p_j}(x, t, u, \partial_i u)\xi_i\xi_j = \Phi'(u)|\xi|^2 > C|\xi|^2.$$

Dakle jednadžba uz te pretpostavke postaje nedegenerirana parabolička.

Pretpostavimo nadalje, bez smanjenja općenitosti da vrijedi $\Phi(0) = 0$. Kad imamo posla s nehomogenim medijem, tj kad je $\Phi = \Phi(x,u)$ tada pretpostavljamo da je $\Phi : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatka funkcija u obje varijable, strogo rastuća po drugoj te da je $\Phi(x,0) = 0$, $\forall x \in \Omega$.

Promotrimo **homogenu Dirichletovu zadaću**:

$$\partial_t u = \Delta(\Phi(x,u)) + f \qquad \text{na } Q_T, \tag{3.6}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad \text{na } \Omega, \tag{3.7}$$

$$u(x,t) = 0 \qquad \text{na } \Sigma_T, \tag{3.8}$$

gdje je $Q_T = \Omega \times \langle 0,T\rangle$, $\Sigma_T = \partial\Omega \times [0,T\rangle$. Teorija kvazilinearnih paraboličkih jednadžbi nam daje sljedeći teorem o egzistenciji klasičnih rješenja.

Teorem 3.1.6. *Neka su funkcije u_0 i f glatke, klase C^α, te neka vrijede prethodne pretpostavke o funkciji Φ. Tada Dirichletova zadaća* (3.6)-(3.8) *ima klasično rješenje $u \in C^{2,1}(\overline{Q_T})$. Ako su funkcije Φ, u_0 i f klase C^∞ tada je i rješenje u također klase C^∞.*

Gornji Dirichletov problem služi kao izvor aproksimacijskih rješenja pomoću kojih ćemo konstruirati slaba rješenja JPS-a. Analogni teorem vrijedi i za nehomogenu Dirichletovu zadaću.

3.2 Ocjena stabilnosti

U razvoju teorije egzistencije, jedinstvenost i stabilnosti, bitna je činjenica da rješenje problema neprekidno ovisi o početnim podacima u prostoru L^1.

Teorem 3.2.1. *Neka su u i $\hat{u}$ dva glatka rješenja Dirichletovog problema* (3.6)-(3.8)*, u_0, $\hat{u}_0$ pripadni početni podaci te f, $\hat{f}$ pripadne desne strane jednadžbe. Tada vrijedi $\forall t > \tau \geq 0$*

$$\int_\Omega (u(x,t) - \hat{u}(x,t))_+ dx \leq \int_\Omega (u(x,\tau) - \hat{u}(x,\tau))_+ dx + \int_\tau^t \int_\Omega (f(x,t) - \hat{f}(x,t))_+ dxdt.$$

Nadalje,

$$\|u(t) - \hat{u}(t)\|_1 \leq \|u_0 - \hat{u}_0\|_1 + \int_0^t \|f(s) - \hat{f}(s)\|_1 ds.$$

Dokaz. Dokaz koristi tipičnu tehniku teorije slabih rješenja, množenje dobrim testnim funkcijama i integriranje te upotrebu raznih formula parcijalne integracije. Odabiremo

$p \in C^1(\mathbb{R})$, takvu da je $0 \le p \le 1$, $p(s) = 0$ za $s \le 0$, $p'(s) > 0$, za $s > 0$. Primjetimo da povoljnim odabirom niza funkcija takvog tipa, možemo dobiti niz koji po točkama monotono konvergira u funkciju $\chi_{\langle 0,\infty\rangle}(x)$. Definiramo:

$$w(x,u) := \Phi(x,u) - \Phi(x,\hat{u})$$

i primjetimo da w iščezava na Dirichletovoj granici. U jednadžbu (3.6) uvrstimo redom rješenja u i $\hat{u}$ pa ih oduzmemo, pomnožimo obje strane sa $p(w)$ i prointegriramo po Ω za fiksni $t > 0$. Dobivamo:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (u_t - \hat{u}_t)p(w)dx &= \int_\Omega \Delta(w)p(w)dx + \int_\Omega (f - \hat{f})p(w)dx \\
&= \int_\Omega \mathrm{div}(\nabla(w)p(w))dx - \int_\Omega |\nabla(w)|^2 p'(w)dx + \int_\Omega (f - \hat{f})p(w)dx \\
&= \int_{\partial\Omega} p(w)\nabla(w)\cdot\vec{n}dS_x - \int_\Omega |\nabla(w)|^2 p'(w)dx + \int_\Omega (f - \hat{f})p(w)dx \\
&= -\int_\Omega |\nabla(w)|^2 p'(w)dx + \int_\Omega (f - \hat{f})p(w)dx. \\
&\le -\int_\Omega |\nabla(w)|^2 p'(w)dx + \int_\Omega (f - \hat{f})_+ dx. \\
&\le \int_\Omega (f - \hat{f})_+ dx.
\end{aligned}$$

Sad možemo prijeći na limes $p \to \chi_{\langle 0,\infty\rangle}$, gdje uzimamo monotoni niz funkcija p. Kako je $u_t - \hat{u}_t \in L^\infty$, a $p \to \chi_{\langle 0,\infty\rangle}$ u L^1, na limesu imamo:

$$\int_\Omega (u_t - \hat{u}_t)\chi_{\langle 0,\infty\rangle}(w)dx \le \int_\Omega (f - \hat{f})_+ dx.$$

Sad primjetimo da je:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u - \hat{u})_+ = \frac{\partial}{\partial t}[(u - \hat{u})\chi_{\langle 0,\infty\rangle}(u - \hat{u})] = (u - \hat{u})_t \chi_{\langle 0,\infty\rangle}(u - \hat{u}).$$

Također, uočimo da zbog pretpostavke o monotonosti funkcije nelinearnosti po drugoj varijabli dobivamo:

$$\chi_{\langle 0,\infty\rangle}(u - \hat{u}) = \chi_{\langle 0,\infty\rangle}(\Phi(x,u) - \Phi(x,\hat{u})).$$

Te dvije činjenice nam daju:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (u-\hat{u})_+ dx \leq \int_\Omega (f-\hat{f})_+ dx. \tag{3.9}$$

Integracijom po segmentu $[\tau, t]$ dobivamo:

$$\int_\Omega (u(x,t)-\hat{u}(x,t))_+ dx \leq \int_\Omega (u(x,\tau)-\hat{u}(x,\tau))_+ + \int_\tau^t \int_\Omega (f-\hat{f})_+ dx. \tag{3.10}$$

Ponavljanjem istog računa za $\hat{w} := \Phi(x,\hat{u}) - \Phi(x,u)$, dobivamo sličnu ocjenu:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (\hat{u}-u)_+ dx \leq \int (\hat{f}-f)_+ dx. \tag{3.11}$$

Zbrajanjem jednadžbi (3.9) i (3.11) dobivamo ocjenu za L^1 normu

$$\frac{d}{dt}\|u-\hat{u}\|_{L^1} \leq \|f-\hat{f}\|_{L^1}.$$

Ovdje integracijom po $[0,t]$, $t > 0$ dobivamo tvrdnju teorema.

□

3.3 Energetska ocjena

U dokazivanju teorema egzistencije slabih rješenja pojavit će se potreba za kontroliranjem norme prostornog gradijenta funkcije $w := \Phi(x,u)$. Kako bi to izveli, uvodimo funkciju Ψ koja je primitivna funkcija od Φ obzirom na varijablu u, za koju vrijedi normalizacijski uvjet $\Psi(x,0) = 0$. Formulom, tu funkciju možemo zapisati kao:

$$\Psi(x,s) = \int_0^s \Phi(x,u)du. \tag{3.12}$$

Primjetimo da za JPS ova funkcija glasi: $\Psi(x,s) = \frac{|s|^{m+1}}{m+1}$.

Nadalje, izvodimo formulu pomoću koje ćemo dobiti ključne ocjene u teoriji egzistencije slabih rješenja. Uzmimo prvo generaliziranu JPS (3.1) i pomnožimo je sa $\Phi(x,u)$ te prointegrirajmo po Q_T:

$$\iint_{Q_T} \partial_t u \Phi(x,u) dxdt = \iint_{Q_T} \Delta(\Phi(x,u))\Phi(x,u)dxdt + \iint_{Q_T} f\Phi(x,u)dxdt. \tag{3.13}$$

Primjetimo da, zbog

$$\partial_t(\Psi(x,u(x,t))) = \partial_t u(x,t)\partial_u \Psi(x,u(x,t)) = \partial_t u(x,t)\Phi(x,u(x,t)),$$

član lijeve strane u (3.13) možemo transformirati na sljedeći način:

$$\iint_{Q_T} \partial_t u \Phi(x,u) dxdt = \iint_{Q_T} \partial_t(\Psi(x,u)) dxdt = \int_\Omega \Psi(x,u(x,T)) dx - \int_\Omega \Psi(x,u_0(x)) dx.$$

Prvi član desne strane transformiramo koristeći formule parcijalne integracije po prostornim varijablama:

$$\iint_{Q_T} \Delta(\Phi(u))\Phi(u) dxdt = \iint_{Q_T} \mathrm{div}(\Phi(u)\nabla(\Phi(u))) dxdt - \iint_{Q_T} |\nabla\Phi(u)|^2 dxdt.$$

Primjenom Greenove formule i činjenice da se funkcija $\Phi(x,u(x,t))$ poništava na rubu od Ω, dobivamo da je:

$$\iint_{Q_T} \mathrm{div}(\Phi(u)\nabla\Phi(u)) dxdt = 0.$$

(Ovdje koristimo homogeni Dirichletov rubni uvjet i normalizacijski uvjet na funkciju Φ.)

Koristeći gornje zaključke, formula (3.13) postaje:

$$\iint_{Q_T} |\nabla\Phi(x,u)|^2 dxdt + \int_\Omega \Psi(x,u(x,T)) dx = \int_\Omega \Psi(x,u_0(x)) dx + \iint_{Q_T} f\Phi(x,u) dxdt. \tag{3.14}$$

Formula (3.14) zove se **energetska formula** ili **energetski identitet**. Zanimljivo je pridružiti fizikalni smisao pojedinim članovima u formuli: Izraz

$$E_u(t) := \int_\Omega \Psi(x,u(x,t)) dx$$

naziva se **prirodna energija evolucije**, a izraz

$$DE(u) := \int_0^T \int_\Omega |\nabla\Phi(x,u)|^2 dxdt$$

se naziva **rasipana energija**.

Izvorni član koji uključuje desnu stranu f reprezentira rad vanjskih sila. Njega ocjenjujemo primjenom Hölderove nejednakosti na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\iint_{Q_T} f\Phi(x,u) dxdt &= 2\iint_{Q_T} \frac{f}{2\varepsilon}\varepsilon\Phi(x,u) dxdt \\ &\leq 2\Big(\iint_{Q_T} \frac{f^2}{4\varepsilon^2} dxdt\Big)^{1/2}\Big(\iint_{Q_T} \varepsilon^2\Phi(x,u)^2 dxdt\Big)^{1/2}\end{aligned}$$

Primjenom nejednakosti $2ab \leq a^2 + b^2$, konačno dobivamo ocjenu:

$$\iint_{Q_T} f\Phi(x,u)dxdt \leq \frac{1}{4\varepsilon^2}\iint_{Q_T} f^2 dxdt + \varepsilon^2 \iint_{Q_T} \Phi(x,u)^2 dxdt. \tag{3.15}$$

Variranjem ε možemo kontrolirati desnu stranu na način da smanjimo prvi član i povećamo drugi i obrnuto.

Kako se u homogenom Dirichletovom problemu Φ poništava na $\partial\Omega$, na zadnji član možemo primjeniti Poincareovu nejednakost koja nam daje:

$$\iint_{Q_T} \Phi(x,u)^2 dxdt \leq C \iint_{Q_T} |\nabla\Phi(x,u)|^2 dxdt,$$

gdje je C konstanta koja ovisi samo o Ω. Kombiniranjem gornjih ocjena i energetske formule te uzimanjem $\varepsilon = 1/\sqrt{2C}$ dobivamo ocjenu:

$$\frac{1}{2}\iint_{Q_T} |\nabla\Phi(x,u)|^2 dxdt + \int_\Omega \Psi(x,u(x,T))dx \leq \int_\Omega \Psi(x,u_0(x))dx + \frac{C}{2}\iint_{Q_T} f^2 dxdt. \tag{3.16}$$

Kako je $\Psi \geq 0$ i desna strana omeđena za svaki fiksni $T > 0$ zaključujemo da je $\nabla\Phi(x,u) \in L^2(Q_T)$.

3.4 Ocjena vremenske derivacije

Još jedna ocjena koja se koristi u dokazivanju egzistencije je ocjena vremenske derivacije. Funkcija čiju vremensku derivaciju kontroliramo je

$$z(x,t) := \mathcal{Z}(x,u(x,t)), \tag{3.17}$$

gdje je $\mathcal{Z}$ zadana sa

$$\mathcal{Z}(x,s) = \int_0^s (\partial_u \Phi(x,z))^{\frac{1}{2}} dz. \tag{3.18}$$

Dakle je

$$\partial_t z(x,t) \quad = \quad \partial_u \mathcal{Z}(x,u(x,t))\partial_t u(x,t) = \Phi_u(x,u(x,t))^{\frac{1}{2}}\partial_t u.$$

Primjetimo da je, zbog $2(\Phi_u(x,s))^{\frac{1}{2}} \leq 1 + \phi_u(x,s)$,

$$|\mathcal{Z}(x,s)| = |\int_0^s (\Phi_u(x,z))^{\frac{1}{2}} dz| \leq \frac{1}{2}|s + \Phi(x,s)|$$

pa je stoga $|z| \leq \frac{1}{2}|u + \Phi(x, u)|$.

Kako bi ocjenili z_t, množimo jednadžbu s $\partial_t\Phi(x, u)$ i integriramo po Ω. Dobivamo

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \partial_t\Phi(x, u)\partial_t u dx &= \int_\Omega \partial_t\Phi(x, u)\Delta(\Phi(x, u))dx + \int_\Omega f\partial_t\Phi(x, u)dx \\
&= -\int_\Omega \nabla(\Phi(x, u))\nabla(\partial_t(\Phi(x, u)))dx + \int_\Omega f\partial_t(\Phi(x, u))dx \\
&= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla(\Phi(x, u))|^2 dx + \int_\Omega f\partial_t(\Phi(x, u))dx.
\end{aligned}$$

Dobili smo formulu

$$\int_\Omega \partial_u\Phi(x, u)|\partial_t u|^2 dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla(\Phi(x, u))|^2 dx + \int_\Omega f\partial_t\Phi(x, u)dx, \tag{3.19}$$

u kojoj na lijevoj strani prepoznajemo integral funkcije $|z_t|^2$.

Odaberimo $\xi = \xi(t)$, glatku funkciju rezanja za koju vrijedi $\xi(0) = \xi(T) = 0$, pomnožimo jednadžbu (3.19) i integrirajmo po vremenu. Dobivamo ocjenu:

$$\iint_{Q_T} \partial_u\Phi(x, u)|\partial_t u|^2\xi dxdt = \iint_{Q_T} \Big\{\frac{\xi'}{2}|\nabla(\Phi(x, u))|^2 dxdt - (f\xi)_t\Phi(x, u)\Big\}dxdt. \tag{3.20}$$

Ovom ocjenom kontroliramo L^2 normu vremenske derivacije od z, pod uvjetom da je f_t omeđeno. Naime, prvi član na desnoj strani možemo ocijeniti energetskom ocjenom (3.16).

Ukoliko nemamo uvjet na f_t, formulu (3.19) možemo pomnožiti sa t i integracijom od 0 do T dobiti sljedeću formulu:

$$\begin{gathered}
\iint_{Q_T} t\partial_u\Phi(x, u)|\partial_t u|^2\xi dxdt + \frac{T}{2}\int_\Omega |\nabla(\Phi(x, u(x, T)))|^2 \\
= \frac{1}{2}\iint_{Q_T} |\nabla(\Phi(x, u)|^2 dxdt + \iint_{Q_T} tf\partial_u\Phi(x, u)\partial_t u dxdt.
\end{gathered} \tag{3.21}$$

Primjenom Hölderove nejednakosti, zadnji čan ocjenjujemo kao i prije:

$$\iint_{Q_T} tf\partial_u\Phi(x, u)\partial_t u dxdt \leq \frac{1}{2}\iint_{Q_T} t\partial_u\Phi(x, u)f^2 dxdt + \frac{1}{2}\iint_{Q_T} t\partial_u\Phi(x, u)|\partial_t u|^2 dxdt$$

Zadnji član možemo prebaciti na lijevu stranu u (3.21) te tako dobivamo sljedeću ocjenu vremenske derivacije:

$$\begin{aligned}\iint_{Q_T} t\partial_u\Phi(x,u)|\partial_t u|^2\xi dxdt + T\int_\Omega |\nabla(\Phi(x,u(x,T)))|^2 \\ \leq \iint_{Q_T} |\nabla(\Phi(x,u)|^2 dxdt + \iint_{Q_T} tf^2\partial_u\Phi(x,u)dxdt.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Ovakva ocjena nam daje da je, za omeđene f i u, integral $\int_\tau^T\int_\Omega \partial_u\Phi(x,u)|\partial_t u|^2 dxdt$ omeđen za svake $T > \tau > 0$. Ova ocjena je bitna u nekim dokazima egzistencije slabih rješenja kao argument za konvergenciju aproksimirajućih rješenja.

3.5 Neka dodatna svojstva jednadžbe porozne sredine

Jednadžba porozne sredine ima nekoliko zanimljivih svojstava koja dijeli sa svojim rođakom jednadžbom provođenja usprkos svojoj nelinearnosti i degeneriranosti. Sljedeća svojstva koja navodimo vrijede i za generaliziranu JPS u slučaju kada funkcija nelinearnosti Φ ne ovisi o x eksplicitno.

Elementarne invarijantnosti

Generalizirana JPS je invarijantna na translacije u prostornoj i vremenskoj varijabli. Konkretno, ako je $u(x,t)$ rješenje GJPS-a definirano na domeni Q onda je za svaki $h \in \mathbb{R}^d$ i $\tau \in \mathbb{R}^d$ funkcija

$$\hat{u}(y,s) := u(y-h, s-\tau)$$

također rješenje definirano na translatiranoj domeni

$$Q' = Q + (h,\tau) = \{(x+h, t+\tau), (x,t) \in Q\}.$$

Osim toga, GJPS je invarijantna na simetrije prostornih varijabli oko koordinatnih osi. Tj, ako je $u(x,t)$ rješenje na domeni Q onda je

$$\hat{u}(y,t) = u(-y_1, y_2, ..., y_d, t)$$

rješenje na domeni Q' dobivenoj iz Q simetrijom oko osi $x_1 = 0$. To svojstvo vrijedi za bilo koji odabir koordinata. Dokaz tih dviju činjenica se svodi na uvrštavanje u jednadžbu. Operator Δ je invarijantan na ortogonalne transformacije koordinata u smislu da, ako je O ortogonalna matrica i $u(x)$ funkcija onda je:

$$
\begin{aligned}
\Delta(u(Ox)) &= \mathrm{div}(\nabla(u(Ox))) = \mathrm{div}(\nabla u(Ox)O) = \nabla^2 u(Ox)O : O \\
&= \mathrm{tr}(\nabla^2 u(Ox)OO^\tau) = \mathrm{tr}(\nabla^2 u(Ox)) = \Delta u(Ox).
\end{aligned}
$$

To znači da ako je $u(x,t)$ rješenje jednadžbe (3.1) na domeni Q i O ortogonalna matrica onda je

$$\hat{u}(y,t) = u(Oy,t)$$

rješenje na transformiranoj domeni $Q' = \{(O^{-1}x,t),(x,t) \in Q\}$.
Gornja svojstva nam govore da je jednadžba invarijantna na svako kruto gibanje domene Ω.

Skaliranje

Sljedeće svojstvo invarijantnosti na skaliranje smo upoznali kod izvođenja Barenblattovog rješenja. Jednadžba porozne sredine posjeduje ovo bitno svojstvo zbog specifičnog oblika nelinearnosti. Naime, ako je $u(x,t)$ rješenje jednadžbe $\partial_t u = \Delta(u^m)$ onda je reskalirana funkcija

$$\hat{u}(x,t) = Ku(Lx,Tt), \quad K,L,T > 0$$

opet rješenje ako vrijedi relacija:

$$K^{m-1}L^2 = T.$$

Poglavlje 4

Dirichletova zadaća

U ovom poglavlju koncetriramo se na pitanja egzistencije, jedinstvenosti i drugih svojstava rješenja početno rubne zadaće za JPS, postavljene u omeđenoj prostornoj domeni $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d > 1$. Fokusiramo na prvo na homogeni Dirichletov problem. Notacija koju koristimo je:

$$Q = \Omega \times \mathbb{R}_+, Q_T = \Omega \times \langle 0, T\rangle,$$

$$\Sigma = \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \Sigma_T = \partial\Omega \times [0, T\rangle.$$

Posljedica degeneriranosti JPS-a je da ne očekujemo klasična rješenja jednadžbe već moramo posegnuti za slabim (generaliziranim) rješenjima. Međutim, klasa slabih rješenja može biti prilično općenita i zato je korisno u razvoju teorije suziti tu općenitost kako bi dobili jednostavniju teoriju i mogli izvoditi zanimljive račune i aproksimacije bez ulaganja velikog truda u opravdavanja. U tom smjeru ćemo bazirati teoriju na konstrukciji slabih energetskih rješenja tj. slabih rješenja koja usput zadovoljavaju energetsku ocjenu kao u prošlom poglavlju.

4.1 Slaba rješenja generalizirane jednadžbe porozne sredine

Pretpostavljamo da je Ω omeđena domena u $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, s Lipschitzovom granicom $\Gamma = \partial\Omega$. Promatrat ćemo generaliziranu jednadžbu porozne sredine $u_t = \Delta(\Phi(u)) + f$, gdje za Φ pretpostavljamo da vrijedi sljedeći uvjet:

(H_Φ) *Funkcija* $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je neprekidna, strogo rastuća i* $\Phi(\pm\infty) = \pm\infty, \Phi(0) = 0$.

U ovu pretpostavku je svakako uključena JPS gdje je $\Phi(s) = |s|^{m-1}s$, $m > 1$. Bavimo se rješavanjem sljedećeg problema:

HDP-problem - homogena Dirichletova zadaća:

Za $u_0 \in L^1(\Omega), f \in L^1(Q)$, naći lokalno integrabilnu funkciju $u = u(x,t)$ definiranu na Q_T, $T > 0$ koja zadovoljava:

$$u_t = \Delta(\Phi(u)) + f \qquad \text{na } Q_T, \tag{4.1}$$
$$u(x,0) = u_0(x) \qquad \text{na } \Omega, \tag{4.2}$$
$$u(x,t) = 0 \qquad \text{na } \Sigma_T \tag{4.3}$$

u slabom smislu kojeg ćemo naknadno definirati. Nadalje, u tražimo u odgovarajućoj klasi funkcija koja će osigurati jedinstvenost i neprekinutu ovisnost o početnim podacima.

Uvodimo sljedeće precizne definicije rješenja koja ćemo smatrati rješenjima gornjeg problema. Prvo uvodimo koncept slabog rješenja jednadžbe (4.1).

Definicija 4.1.1. *Slabo rješenje jednadžbe* (4.1) *na Q_T je lokalno integrabilna funkcija $u \in L^1_{loc}(Q_T)$ takva da vrijedi:*

$$w := \Phi(u) \in L^1_{loc}(0,T; W^{1,1}_{loc}(\Omega)),$$

$$\iint_{Q_T} \{\nabla w \cdot \nabla \eta - u\eta_t\} dxdt = \iint_{Q_T} f\eta dxdt, \quad \forall \eta \in C^1_c(Q_T). \tag{4.4}$$

Ova definicija je dobivena poopćavanjem svojstava klasičnih glatkih rješenja, množenjem jednadžbe test funkcijama, integriranjem po Q_T i korištenjem formula parcijalne integracije po prostornim i vremenskim varijablama. Definicija više na zahtjeva da derivacije iz jednadžbe (4.1) budu klasične derivacije već da postoje u smislu distribucija. Sljedeći koncept slabog rješenja dodatno relaksira pojam prostorne derivacije rješenja.

Definicija 4.1.2. *Vrlo slabo rješenje jednadžbe* (4.1) *na Q_T je lokalno integrabilna funkcija $u \in L^1_{loc}(Q_T)$ takva da vrijedi:*

$$w := \Phi(u) \in L^1_{loc}(Q_T),$$

$$\iint_{Q_T} \{w\Delta\eta + u\eta_t + f\eta\} dxdt = 0, \quad \forall \eta \in C^1_c(Q_T). \tag{4.5}$$

Gornja rješenja definiramo u prostoru $L^1_{loc}(Q_T)$ radi općenitosti. Međutim, neke rezultate je lakše dobiti zamjenom tih prostora s nekim njegovim potprostorima $L^p_{loc}(Q_T)$, $1 < p \leq \infty$. Prisjetimo se da su u slučaju omeđene domene Q, prostori $L^p(Q)$, $1 \leq p \leq \infty$ uređeni u padajućem poretku. Ta činjenica slijedi iz Hölderove nejednakosti.

Prethodne definicije slabih rješenja vrijede u unutrašnjosti prostorno-vremenske domene i ne uzimaju u obzir početno rubne uvjete. Homogeni Dirichletov rubni uvjet se ugrađuje u prostor na način da tražimo rješenja koja se na rubu poništavaju u smislu traga, tj zamjenjujemo prostor $W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ prostorom $W^{1,1}_0(\Omega)$ kao u sljedećoj definiciji:

Definicija 4.1.3. *Lokalno integrabilna funkcija u definirana na Q_T je slabo rješenje jednadžbe* (4.1) *uz rubni uvjet* (4.3) *ako:*

$$u \in L^1(\Omega \times (\tau, T-\tau)), \quad \forall \tau > 0,$$

$$w := \Phi(u) \in L^1_{loc}(0, T; W^{1,1}_0(\Omega)),$$

$$\iint_{Q_T} \nabla w \cdot \nabla \eta - u\eta_t dxdt = \iint_{Q_T} f\eta dxdt, \quad \forall \eta \in C^1(\overline{Q_T}) \tag{4.6}$$

pri čemu se η poništava na Σ_T i također za $0 \le t \le \tau$, $T-\tau \le t \le T$, $\tau > 0$.

U sljedećoj definiciji uključujemo početne podatke. Za to moramo varijacijsku jednadžbu testirati i na funkcijama koje se ne poništavaju za $t = 0$.

Definicija 4.1.4. *Funkcija $u \in L^1(Q_T)$ je slabo rješenje problema* HDP *ako je $w := \Phi(u) \in L^1(0, T; W^{1,1}_0(\Omega))$, te vrijedi*

$$\iint_{Q_T} \nabla w \cdot \nabla \eta - u\eta_t dxdt = \int_\Omega u_0(x)\eta(x,0)dx + \iint_{Q_T} f\eta dxdt, \quad \forall \eta \in C^1(\overline{Q_T}) \tag{4.7}$$

pri čemu se η poništava na Σ i za $t = T$.

Početni uvjet $u(x,0) = u_0(x)$ je ugrađen u varijacijsku formulaciju (4.7) poopćavanjem formule koja vrijedi za glatke funkcije. Parcijalnom integracijom po vremenskoj varijabli iziđe član $\int_\Omega u_0(x)\eta(x,0)dx$.

Postavlja se pitanje u kojem smislu slabo rješenje iz gornje definicije zadovoljava početni uvjet, tj. u kojem smislu vrijedi uvjet (4.2). Način na koji smo uključili početne podatke u_0 u definiciju slabog rješenja nije jedini prirodan način. Sljedećom propozicijom dajemo alternativni način definiranja slabog rješenja i pokazujemo da se radi o specijalnom slučaju Definicije 4.1.4.

Propozicija 4.1.5. *Neka je $u \in L^1(Q_T)$ takva da je:*

$$\Phi(u) \in L^1(0, T; W^{1,1}_0(\Omega)),$$

$$\iint_{Q_T} \{\nabla w \cdot \nabla \eta - u\eta_t\} dxdt = \iint_{Q_T} f\eta dxdt, \quad \forall \eta \in C^\infty_c(Q_T), \tag{4.8}$$

$$u(t) \in L^1(\Omega), \forall t > 0 \text{ i vrijedi da } u(t) \to u_0 \text{ u } L^1(\Omega), \text{ kad } t \to 0.$$

Tada je u slabo rješenje problema HDP u smislu Definicije 4.1.4.

Dokaz. Odaberimo funkciju $\eta \in C^\infty(\overline{Q_T})$ koja se poništava na Σ i za $t = T$. Pretpostavimo dodatno da se η zapravo poništava i na nekoj okolini Σ. Uzmimo funkciju rezanja $\xi \in C^\infty(\mathbf{R})$, $0 \le \xi \le 1$, $\xi(t) = 0$, za $t < 0$, $\xi(t) = 1$, za $t \ge 1$ i $\xi'(t) \ge 0$ i definiramo niz

$$\xi_n(t) := \xi(nt).$$

Konstruiramo niz test fukcija $\eta(x,t)\xi_n(t) \in C_c^\infty(Q_T)$. Na njima testiramo formulu iz pretpostavke propozicije:

$$\iint_{Q_T} f\eta\xi_n dxdt = \iint_Q \nabla(\Phi(u)) \cdot \nabla(\eta\xi_n) - u\eta_t\xi_n - u\eta\xi_n' dxdt.$$

Slijedi:

$$\begin{aligned}\iint_Q [\nabla(\Phi(u)) \cdot \nabla\eta - u\eta_t]\xi_n dxdt - \iint_{Q_T} f\eta\xi_n dxdt = \iint_{Q_T} u\eta\xi_n' dxdt \\ = \int_\Omega \int_0^{2/n} u\eta\xi_n' dtdx = \int_\Omega \int_0^{2/n} (u - u_0)\eta\xi_n' dtdx + \int_\Omega \int_0^{2/n} u_0\eta\xi_n' dtdx \\ = I + J.\end{aligned}$$

Fiksiramo $\varepsilon > 0$ i odaberimo n dovoljno velik da je $\|u(t) - u_0\|_1 \le \varepsilon$ za $0 \le t \le 2/n$.

Prvi integral (I) možemo ocijeniti na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_0^{2/n} (u(t) - u_0)\eta\xi_n' dtdx &\le \int_0^{2/n} (\int_\Omega |u(t) - u_0||\eta| dx)\xi_n' dt \\ &\le \varepsilon\|\eta\|_\infty \int_0^{2/n} \xi_n' dt = \varepsilon\|\eta\|_\infty.\end{aligned}$$

Promotrimo sad drugi integral (J):

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_0^{2/n} u_0(x)\eta(x,t)\xi_n'(t) dxdt &= \int_\Omega u_0(x)\Big[\eta(x,t)\xi_n(t)\Big|_0^{2/n} - \int_0^{2/n} \eta_t(x,t)\xi_n(t)dt\Big]dx \\ &= \int_\Omega u_0(x)\eta(x,2/n)dx - \int_\Omega \int_0^{2/n} u_0\eta_t\xi_n dtdx.\end{aligned}$$

Kako je Ω omeđen i $u_0 \in L^1(\Omega)$, imamo:

$$\int_\Omega u_0(x)\eta(x,2/n)dx \to \int_\Omega u_0(x)\eta(x,0)dx,$$

$$\int_\Omega \int_0^{2/n} u_0\eta_t\xi_n dtdx \le C\frac{2}{n} \to 0,$$

kad $n \to \infty$. Dakle, za test funkcije $\varphi \in C^\infty$ koje se poništavaju na okolini Σ i za $t = T$ vrijedi

$$\iint_{Q_T} \nabla(\Phi(u)) \cdot \nabla\varphi - u\varphi_t dxdt = \int_\Omega u_0(x)\varphi(x,0)dx + \iint_{Q_T} f\varphi dxdt.$$

Tvrdimo da isto vrijedi i za test funkcije $\eta \in C^1(\overline{Q_T})$ koje se poništavaju na Σ i za $t = T$. To slijedi iz činjenice da funkciju iz $C^1(\overline{Q_T})$ koja se poništava na dijelu granice možemo po volji dobro aproksimirati (u smislu $C^1(\overline{Q_T})$ norme) funkcijom iz $C^\infty(\overline{Q_T})$ koja se poništava na istom dijelu granice. □

Međutim, pretpostavka o jakoj konvergenciji je prejaka za Definiciju 4.1.4 što pokazuje sljedeća propozicija.

Propozicija 4.1.6. *Neka je u slabo rješenje problema HDP u smislu definicije 4.1.4. Tada $u(t)$ konvergira k u_0 slabo u smislu da za svaki $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ imamo*

$$\lim_{t\to 0} \int_\Omega u(t)\varphi dx = \int_\Omega u_0\varphi dx.$$

Dokaz. Odaberimo funkciju $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ i definirajmo funkciju $U : [0,T] \to \mathbf{R}$ sa

$$U(t) := \int_\Omega \varphi(x)u(x,t)dx.$$

Pokazat ćemo da je funkcija U neprekidna te ćemo pomoću toga dobiti tvrdnju propozicije.

Uzmimo prvo $\xi \in C_c^\infty(0,T)$. Sad imamo:

$$\int_0^T U(t)\xi(t)'dt = \iint_{Q_T} u\varphi\xi' dxdt = \iint_{Q_T} [\nabla(\Phi(u))\nabla\varphi - f\varphi]\xi(t)dxdt.$$

Po pretpostavkama iz Definicije 4.1.4 slijedi da je $\nabla(\Phi(u))\nabla\varphi - f\varphi \in L^1(0,T)$, pa stoga zaključujemo da funkcija U ima slabu derivaciju u $L^1(0,T)$. Kako je $u \in L^1(Q_T)$ i φ omeđena, slijedi da je

$$\int_0^T U(t)dt = \iint_{Q_T} \varphi(x)u(x,t)dxdt \le C \iint_{Q_T} |u(x,t)|dxdt.$$

Dakle $U \in W^{1,1}(0,T)$. Međutim kako je u jednoj dimenziji prostor $W^{1,1}(0,T)$ uložen u $C([0,T])$, slijedi da je funkcija U neprekidna na $[0,T]$.

Promotrimo sad funkciju

$$\xi(t) = \begin{cases} 1-t & , t \le 1 \\ 0 & , t > 1 \end{cases}$$

i konstruiramo niz funkcija $\xi_n(t) = \xi(nt)$. Nadalje, definiramo niz testnih funkcija u separiranom obliku: $\eta_n(x,t) := \varphi(x)\xi_n(t)$. Ovaj niz test funkcija ima svojstvo da se sve poništavaju na Σ i za $t = T$. Nadalje, možemo ih aproksimirati glatkim funkcijama klase C^1 tako da ih možemo iskoristiti u Definiciji 4.1.4. Aproksimacija funkcija ξ_n glatkim funkcijama je takva da njihove derivacije aproksimiraju slabu derivaciju od ξ_n (npr, aproksimacija u prostoru $W^{1,1}(0,T)$). Tada prijelazom na limes dobivamo sljedeću formulu:

$$\iint_{Q_T} (\nabla(\Phi(u)) \cdot \nabla\eta_n - u\eta_{n,t})dxdt = \int_\Omega u_0\varphi dx + \iint_{Q_T} f\eta_n dxdt, \tag{4.9}$$

odnosno

$$\iint_{Q_T} \nabla(\Phi(u)) \cdot \nabla\varphi\xi_n dxdt - \int_0^{1/n} U(t)\xi_n' dt = \int_\Omega u_0\varphi dx + \iint_{Q_T} f\varphi\xi_n dxdt. \tag{4.10}$$

Kako je funkcija ξ_n apsolutno neprekidna, njena slaba derivacija se podudara s derivacijom g.s. Imamo, stoga, da je

$$\xi_n'(t) = \begin{cases} -n & , t \leq \frac{1}{n} \\ 0 & , t > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Uvrštavamo to u (4.10) i dobivamo:

$$\int_\Omega \int_0^{1/n} \nabla(\Phi(u))\nabla\varphi\xi_n + n\int_0^{1/n} U(t)dt = \int_\Omega u_0\varphi dx + \int_\Omega \int_0^{1/n} f\varphi\xi_n dxdt \tag{4.11}$$

Preformulirano, imamo:

$$n\int_0^{1/n} U(t)dt = \int_\Omega \int_0^{1/n} \nabla(\Phi(u))\nabla\varphi\xi_n + \int_\Omega u_0\varphi dx + \int_\Omega \int_0^{1/n} f\varphi\xi_n dxdt \tag{4.12}$$

Kako je $\xi_n \leq 1$ te $\nabla(\Phi(u))\nabla\varphi,\ f\varphi \in L^1(Q_T)$, prvi i zadnji integral na desnoj strani idu u 0 kad $n \to \infty$. Zbog neprekidnosti funkcije U imamo da za limes srednjih vrijednosti vrijedi:

$$\lim_{t\to 0} U(t) = \lim_{n\to\infty} n\int_0^{1/n} U(t)dt = \int_\Omega u_0\varphi dx. \tag{4.13}$$

$\square$

Konvergencija iz prethodne propozicije je konvergencija u smislu distribucija. Ipak u slučaju energetskih rješenja imat ćemo jaku konvergenciju u L^1.

Prisjetimo se Barenblattovog rješenja. Ukoliko odaberemo dovoljno veliki Ω i dovoljno mali $T > 0$ tako da nosač graničnog rješenja bude sadržan u Ω, to rješenje će zadovoljavati homogeni Dirichletov rubni uvjet na Q_T. Međutim, s obzirom na našu definiciju, to nije slabo rješenje. Za $t \to 0$, Barenblattovo rješenje konvergira u smislu distribucija u Diracovu mjeru $\delta_0 \notin L^1(\Omega)$. Od njega se ipak mogu dobiti slaba rješenja jednostavno uzevši kao početni trenutak bilo koje vrijeme $t > 0$.

Sljedeći teorem nam daje dovoljne uvjete za jedinstvenost slabih rješenja.

Teorem 4.1.7. *Pod dodatnom pretpostavkom da je $\Phi(u) \in L^2(0,T : H_0^1(\Omega))$ i $u \in L^2(Q_T)$, problem* HDP *ima najviše jedno slabo rješenje.*

Dokaz. Pretpostavimo da imamo dva slaba rješenja u_1 i u_2. Tada za sve test funkcije iz Definicije 4.1.4 vrijedi

$$\iint_{Q_T} \nabla(\Phi(u_i))\nabla\eta - u_i\eta_t dxdt = \int_\Omega u_0(x)\eta(x,0)dx + \iint_{Q_T} f\eta dxdt, \quad i = 1,2. \tag{4.14}$$

Označimo $w_i = \Phi(u_i)$, oduzmemo i dobivamo:

$$\iint_{Q_T} \nabla(w_1 - w_2)\nabla\eta - (u_1 - u_2)\eta_t dxdt = 0, \tag{4.15}$$

za svaku test funkciju $\eta \in C^1(\overline{Q_T})$ koja se poništava na Σ i za $t = T$.

Konstruiramo test funkciju

$$\eta(x,t) = \begin{cases} \int_t^T \{w_1(x,s) - w_2(x,s)\}ds & , 0 < t < T \\ 0 & , t \geq T. \end{cases}$$

Kako je $\Phi(u(\cdot,t)) \in H_0^1(\Omega)$ za g.s. t, onda je $\nabla(\Phi(u_i(\cdot,t))) \in (L^2(\Omega))^d$ za g.s. t. Za test funkciju $\varphi \in (C_c^\infty(\Omega))^d$ imamo da za slabu derivaciju od η vrijedi:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla\eta \cdot \varphi dx &= -\int_\Omega \eta \operatorname{div}\varphi dx = -\int_\Omega \int_t^T (w_1 - w_2) \operatorname{div}\varphi ds dx \\ &= \int_t^T \int_\Omega (\nabla w_1 - \nabla w_2) \cdot \varphi dx ds \\ &= \int_\Omega (\int_t^T (\nabla w_1 - \nabla w_2) ds) \cdot \varphi dx. \end{aligned}$$

Slično je

$$\int_0^T \eta_t \varphi ds = -\int_0^T (w_1 - w_2)\varphi ds.$$

Nadalje, zbog $\nabla w_1 - \nabla w_2 \in (L^2(Q_T))^d$ imamo

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} \left[\left| \int_t^T \nabla w_1 - \nabla w_2 ds \right| \right]^2 dxdt &\leq \iint_{Q_T} T\|\nabla w_1(x) - \nabla w_2(x)\|^2_{L^2(0,T)} dxdt \\ &\leq T^2 \|\nabla w_1 - \nabla w_2\|^2_{L^2(Q_T)}. \end{aligned}$$

Pokazali smo, dakle, da vrijedi:

$$\eta_t = -(w_1 - w_2) \in L^2(Q_T), \tag{4.16}$$

$$\nabla\eta = \int_t^T \nabla w_1 - \nabla w_2 ds \in (L^2(Q_T))^d \tag{4.17}$$

Vidimo, dakle, da je $\eta \in H^1(0,T;H_0^1(\Omega))$. Također, η je klase $C([0,T];H_0^1(\Omega))$, kao integral L^2 funkcije. Kako je $\eta(x,T) = 0$, η se može aproksimirati funkcijama klase $C^1(\overline{Q_T})$ koje se poništavaju na Σ i za $t = T$ u normi prostora $H^1(0,T;H_0^1(\Omega))$. Time dobivamo da formula (4.15) vrijedi za η. Uvrštavanjem gornjih izraza u (4.15) dobivamo:

$$\iint_{Q_T} \nabla(w_1 - w_2)\cdot(\int_t^T (\nabla w_1 - \nabla w_2)ds)dxdt + \iint_{Q_T} (u_1 - u_2)(w_1 - w_2)dxdt = 0. \tag{4.18}$$

Promotrimo funkciju

$$f(x,t) := -\frac{1}{2}\Big\{\int_t^T (\nabla w_1(x,s) - \nabla w_2(x,s))ds\Big\}^2.$$

Deriviranjem kompozicije dobivamo da vrijedi:

$$\partial_t f(x,t) = (\int_t^T (\nabla w_1(x,s) - \nabla w_2(x,s))ds)\cdot(\nabla w_1(x,t) - \nabla w_2(x,t)).$$

Dakle je

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \Big\{\int_0^T (\nabla w_1 - \nabla w_2)ds\Big\}^2 dx + \iint_{Q_T} (u_1 - u_2)(w_1 - w_2)dxdt = 0 \tag{4.19}$$

Kako su pointegralne funkcije nenegativne i $w_i = \Phi(u_i)$, $i = 1,2$ su bijekcije zaključujemo da je $u_1 = u_2$ g.s. na Ω. □

4.2 Egzistencija slabih energetskih rješenja.

Jedinstvenost slabih rješenja je dokazana u podklasi slabih rješenja za koja vrijedi $u \in L^2(Q_T)$, $\Phi(u) \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Ova dodatna regularnost nam dozvoljava da definiramo rasipanu energiju

$$DE(u) = \int_0^T \int_\Omega |\nabla\Phi(u)|^2 dxdt. \tag{4.20}$$

Rješenja ćemo konstruirati u klasi kvadratno integrabilnih funkcija takvih da su $DE(u)$ i

$$E_u(t) := \int_\Omega \Psi(u(t))dx \tag{4.21}$$

konačni. Tu klasu nazivamo **slaba energetska rješenja**. Prisjetimo se, sa Ψ označavamo primitivnu funkciju od Φ

$$\Psi(s) = \int_0^s \Phi(u)du. \tag{4.22}$$

Slučaj s nenegativnim podacima je najtipičnija zadaća koja se rješava za jednadžbu porozne sredine. Uvodimo sljedeće pretpostavke o funkciji nelinearnosti Φ:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \text{ je neprekidna i strogo rastuća po } u \text{ te je } \Phi(0^+) = 0, \\ \text{nadalje, za } u > 0 \text{ je } \Phi(u) \text{ glatka i } \Phi'(u) > 0. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Za početne podatke moramo pretpostaviti $\Psi(u_0(x)) \in L^1(\Omega)$. Nadalje bit će nam potrebno da izraz $\iint f\Phi(u)dxdt$ ima smisla, pa nam je potrebna pretpostavka da je $f \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))'$. Međutim, radi jednostavnosti ćemo pretpostavljati samo da je f omeđena.

Teorem 4.2.1. *Neka za funkciju nelinearnosti Φ vrijede pretpostavke* (4.23). *Tada postoji slabo rješenje zadaće* HDP *u smislu Definicije 4.1.4 s početnim podacima u_0 i izvornim članom f za koje vrijedi:*

$u_0 \in L^1(\Omega)$, $\Psi(u_0) \in L^1(\Omega)$, $u_0 \geq 0$,

$f \in L^\infty(Q)$, $f \geq 0$.

Rješenje je nenegativno i definirano na Q_T, za svaki $T > 0$.

Nadalje, $\Psi(u) \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ za svaki $T > 0$ i $\Phi(u) \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Vrijedi i energetska ocjena

$$\iint_{Q_T} |\nabla\Phi(u)|^2 dxdt + \int_\Omega \Psi(u(x,T))dx \leq \int_\Omega \Psi(u_0(x))dx + \iint_{Q_T} f\Phi(u)dxdt. \tag{4.24}$$

Za ova rješenja vrijedi i princip uspoređivanja:

Ako su u i $\hat{u}$ dva slaba rješenja uz početne podatke za koje vrijedi $u_0 \leq \hat{u}_0$ g.s. na Ω te $f \leq \hat{f}$ g.s. na Q, tada je $u \leq \hat{u}$ g.s. na Q.

Dokaz. Dokaz teorema ide u nekoliko koraka. Prvo promatramo slučaj glatkih funkcija u_0 i f i dokazujemo rezultat aproksimacijom i monotonim limesom.

Lema 4.2.1.1. *Tvrdnja teorema vrijedi ukoliko pretpostavljimo da je $\Gamma = \partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, $u_0 \geq 0$, $u_0 \in C_c^2(\Omega)$ i $f \geq 0$ neprekidna i omeđena na $\overline{Q}$.*

Dokaz. Konstruiramo niz aproksimirajućih podataka $u_{0,n}$ koji ne postižu vrijednost $u = 0$, kako bismo izbjegli degeneraciju jednadžbe.

Stavimo

$$u_{0,n}(x) := u_0(x) + \frac{1}{n}. \tag{4.25}$$

Označimo sa $M = \sup_{\Omega}(u_0)$ i $N = \sup_Q f$.

Aproksimiramo f nizom glatkih funkcija f_n u $L^1(Q)$ u monotono padajućem poretku, zadržavajući ogradu $0 \leq f_n \leq N + \frac{1}{n}$.

Dalje rješavamo aproksimacijsku zadaću:

$$(u_n)_t = \Delta(\Phi(u_n)) + f_n \qquad \text{na } Q, \tag{4.26}$$

$$u_n(x, 0) = u_{0n}(x) \qquad \text{na } \Omega, \tag{4.27}$$

$$u_n(x, t) = \frac{1}{n} \qquad \text{na } \Sigma \tag{4.28}$$

Na sličan način kao u Teoremu 3.1.5 možemo zaključiti da gornje aproksimirajuće zadaće imaju jedinstvena klasična rješenja $u_n \in C^{2,1}(\overline{Q})$.

Naime, za svaki $n \in \mathbf{N}$ možemo promotriti jednadžbe

$$u_{n,t} = \operatorname{div}(\alpha_n(u_n)\nabla u_n) + f_n,$$

gdje je $\alpha_n(u) = \Phi'(u)$ na $[\frac{1}{n}, M + \frac{2}{n} + NT]$, a inače je oblika $\alpha_n(u) = Cu$ pri čemu je prijelaz između ta dva oblika gladak. Na ovaj način je $\alpha_n(u) \geq c > 0$ i jednadžba ne degenerira pa kvazilinearna teorija daje egzistenciju i jedinstvenost rješenja $u_n \in C^{2,1}(\overline{Q})$ koja pritom zadovoljavaju ogradu:

$$\frac{1}{n} \leq u_n(x, t) \leq M + Nt + \frac{2}{n}.$$

S obzirom da u_n ne poprima vrijednosti u perturbiranom dijelu od Φ radi se o rješenju zadaće (4.26)-(4.27).

Princip uspoređivanja daje

$$u_{n+1}(x, t) \leq u_n(x, t), \text{ na } \overline{Q}, \quad \forall n \geq 1,$$

s obzirom da je $u_{0,n+1} \leq u_{0,n}$ te $f_{n+1} \leq f_n$.

Kako je niz $u_n(x, t) \geq 0$, $\forall n \geq 1$ i padajuć za svako $(x, t) \in Q$, možemo definirati funkciju

$$u(x, t) := \lim_{n\to\infty} u_n(x, t), \quad (x, t) \in \overline{Q}. \tag{4.29}$$

Jasno je da, kako je Q_T omeđen i u_n su glatke, ograničene funkcije, vrijedi da je $u_n \in L^p(Q_T)$, za sve $1 \leq p \leq \infty$. Sad, primjenom teorema o monotonoj konvergenciji slijedi da je i $u \in L^p(Q_T)$ i $u_n \to u \in L^p(Q_T)$. Naime:

$$\iint_{Q_T} |u_n(x, t) - u(x, t)|^p dxdt = \iint_{Q_T} (u_n(x, t) - u(x, t))^p dxdt$$

$$\leq (\max_{Q_T}(u_n - u))^{p-1} \iint_{Q_T} (u_n(x, t) - u(x, t))dxdt \to 0.$$

Odmah vidimo da na limesu dobivamo ocjenu

$$0 \leq u(x,t) \leq M + Nt, \text{ na } \overline{Q}.$$

Kako bismo pokazali da je u slabo rješenje problema *HDP*, potrebno je prvo ocijeniti prostorni gradijent od $\Phi(u_n)$. Kontroliramo $\nabla\Phi(u)$ kao u energetskoj ocjeni u prošlom poglavlju. Međutim, testna funkcija će ovdje biti

$$\eta_n = \Phi(u_n) - \Phi(\frac{1}{n}),$$

s obzirom da je $\eta_n = 0$ na Σ. Množenjem jednadžbe (4.1) sa η_n i integriranjem dobivamo

$$\iint_{Q_T} \partial_t u_n \eta_n dxdt = \iint_{Q_T} \Delta(\Phi(u_n))\eta_n dxdt + \iint_{Q_T} f_n \eta_n dxdt. \tag{4.30}$$

Na sličan način kao i prije uvodimo funkciju Ψ i parcijalno integriramo:

$$\iint_{Q_T} \Delta(\Phi(u_n))\eta_n dxdt = -\iint_{Q_T} |\nabla(\Phi(u_n))|^2 dxdt,$$

$$\begin{aligned}\iint_{Q_T} \partial_t u_n \eta_n dxdt &= \int_\Omega \int_0^T \partial_t u_n \Phi(u_n) dxdt - \int_\Omega \int_0^T \partial_t u_n \Phi(\frac{1}{n}) dxdt \\ = \int_\Omega \{\Psi(u_n(x,T)) - \Psi(u_{0,n}(x))\}dx &- \int_\Omega \{u_n(x,T)\Phi(\frac{1}{n}) - u_{0,n}(x)\Phi(\frac{1}{n})\}dx.\end{aligned}$$

Time (4.30) prelazi u:

$$\begin{aligned}\iint_{Q_T} |\nabla(\Phi(u_n))|^2 dxdt &= \int_\Omega \{\Psi(u_{0,n}(x)) - u_{0,n}(x)\Phi(\frac{1}{n})\}dx \\ &- \int_\Omega \{\Psi(u_n(x,T)) - u_n(x,T)\Phi(\frac{1}{n})\}dx \\ &+ \iint_{Q_T} f_n(\Phi(u_n) - \Phi(\frac{1}{n}))dxdt =: I + J + K.\end{aligned} \tag{4.31}$$

Integral I ocjenjujemo na sljedeći način:

$$I = \int_\Omega \{\Psi(u_{0,n}(x)) - u_{0,n}(x)\Phi(\frac{1}{n})\}dx \leq \int_\Omega \Psi(u_{0,n}(x))dx. \tag{4.32}$$

Potrebno je, nadalje, ocijeniti integral J. Prisjetimo se, funkciju Ψ smo definirali kao primitivnu funkciju od Φ. Stoga imamo:

$$\begin{aligned}\Psi(u_n(x,T)) &= \int_0^{u_n(x,T)} \Phi(s)ds = \int_0^{u_{0,n}(x)} \Phi(s)ds + \int_{u_{0,n}(x)}^{u_n(x,T)} \Phi(s)ds \\ &\geq \int_0^{u_{0,n}(x)} \Phi(s)ds + \Phi(\frac{1}{n})(u_n(x,T) - u_{0,n}(x)) \\ &\geq \Phi(\frac{1}{n})(u_n(x,T) - u_{0,n}(x)).\end{aligned}$$

Vrijedi, dakle, da je

$$\Psi(u_n(x,T)) - \Phi(\frac{1}{n})u_n(x,T) \geq -\Phi(\frac{1}{n})u_{0,n}(x),$$

što nam daje ocjenu:

$$J = -\int_\Omega \{\Psi(u_n(x,T)) - \Phi(\frac{1}{n})u_n(x,T)\}dx \leq \int_\Omega \Phi(\frac{1}{n})u_{0,n}(x)dx. \tag{4.33}$$

Integral K ocjenjujemo primjenom Hölderove i Poincareove nejednakosti.

$$K \leq C \iint_{Q_T} f_n^2 dxdt + \frac{1}{2}\iint_{Q_T} |\nabla(\Phi(u_n)|^2 dxdt. \tag{4.34}$$

Poincareovu nejednakost smo primjenili na funkciju $\Phi(u_n(t)) - \Phi(\frac{1}{n}) \in H_0^1(\Omega)$, za gotovo svaki t.

Kombiniranjem ocjena (4.32), (4.33) i (4.34) dobivamo konačnu ocjenu:

$$\frac{1}{2}\iint_{Q_T} |\nabla(\Phi(u_n))|^2 dxdt \leq \int_\Omega \Psi(u_{0,n}(x))dx + \int_\Omega \Phi(\frac{1}{n})u_{0,n}(x)dx + C\iint_{Q_T} f_n^2 dxdt. \tag{4.35}$$

Kako je za svaki n funkcija $f_n \in L^1(Q)$ omeđena, tada je i $f_n \in L^2(Q)$. Nadalje, kako je u_0 omeđena, imamo da su i $u_{0,n}$ omeđene uniformno po n i stoga je $\Psi(u_{0,n}) \in L^1(\Omega)$. Tako dobivamo da je $\nabla(\Phi(u_n)) \in (L^2(Q))^d$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Niz f_n je konvergentan u $L^2(Q)$ pa je omeđen i ta činjenica nam daje da je $\nabla(\Phi(u_n))$ omeđen niz u $(L^2(Q))^d$.

Međutim, prostor $(L^2(Q))^d$ je Hilbertov, pa postoji podniz niza $\nabla(\Phi(u_n))$ koji konvergira prema funkciji $\psi \in (L^2(Q))^d$ slabo u $(L^2(Q))^d$. Kako $\Phi(u_n) \to \Phi(u)$ u svakoj točki, to nam daje da $\forall \varphi \in (C_c^\infty(Q))^d \subset (L^2(Q))^d$ vrijedi

$$\begin{aligned}\iint_Q \psi\varphi dxdt = \lim_{n\to\infty}\iint_Q \nabla\Phi(u_{p(n)})\varphi dxdt &= \lim_{n\to\infty} -\iint_Q \Phi(u_{p(n)})\,\mathrm{div}(\varphi)dxdt \\ &= -\iint_Q \Phi(u)\,\mathrm{div}(\varphi)dxdt.\end{aligned}$$

Dakle, $\psi = \nabla\Phi(u)$ u smislu distribucija. Kako je norma slabo odozdo poluneprekidna, vrijedi:

$$\iint_Q |\nabla(\Phi(u))|^2 dxdt \leq \liminf_n \iint_Q |\nabla(\Phi(u_n))|^2 dxdt < \infty. \tag{4.36}$$

Dakle, imamo da je distribucijski gradijent $\nabla(\Phi(u)) \in (L^2(Q))^d$ i stoga je $\Phi(u(\cdot,t)) \in H^1(\Omega)$, $\forall t > 0$.

Nadalje, $u_n \in C(\overline{Q})$ i $u_n = \frac{1}{n}$ na Σ pa je na limesu $\Phi(u(\cdot,t)) \in H_0^1(\Omega)$ za skoro svako $t > 0$.

Konačno, kako je $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n klasično rješenje jednadžbe (4.1), onda zadovoljava jednadžbu (4.7) uz početne podatke $u_{0,n}$.

Preciznije, vrijedi da za svaku funkciju $\eta \in C^1(\overline{Q_T})$ koja se poništava na Σ i za $t = T$ imamo:

$$\iint_{Q_T} \nabla(\Phi(u_n)) \cdot \nabla\eta - u_n\eta_t dxdt = \int_\Omega u_{0,n}(x)\eta(x,0)dx + \iint_{Q_T} f_n\eta dxdt. \tag{4.37}$$

Kako $\nabla(\Phi(u_n)) \to \nabla(\Phi(u))$ slabo u $(L^2(Q))^d$, vrijedi da

$$\iint_{Q_T} \nabla(\Phi(u_n)) \cdot \nabla\eta dxdt \to \iint_{Q_T} \nabla(\Phi(u)) \cdot \nabla\eta dxdt.$$

Nadalje, jasno je

$$|\int_\Omega u_{0,n}(x)\eta(x,0)dx - \int_\Omega u_0(x)\eta(x,0)dx| \le C\frac{1}{n} \to 0.$$

Nizovi $(u_n)_n$ i $(f_n)_n$ su konvergentni u $L^2(Q)$ pa su i slabo konvergentni i vrijedi:

$$\iint_{Q_T} u_n\eta_t dxdt \to \iint_{Q_T} u\eta_t dxdt,$$

$$\iint_{Q_T} f_n\eta dxdt \to \iint_{Q_T} f\eta dxdt,$$

Time dobivamo da je u slabo rješenje zadaće u smislu definicije 4.1.4.

Promotrimo ocjenu (4.31). Prelaskom na limes $n \to \infty$ dobivamo:

$$\int_\Omega \Psi(u_{0,n}(x)) - u_{0,n}(x)\Phi(\frac{1}{n})dx \to \int_\Omega \Phi(u_0(x))dx,$$

$$\int_\Omega \Psi(u_n(x,T)) - u_n(x,T)\Phi(\frac{1}{n})dx \to \int_\Omega \Phi(u_n(x,T))dx,$$

pri čemu koristimo konvergenciju podintegralnih funkcija po točkama, omeđenost domene Ω i teorem o dominiranoj konvergenciji.

Također vrijedi

$$\iint_{Q_T} f_n(\Phi(u_n(x,t)) - \Phi(\frac{1}{n}))dxdt \to \iint_{Q_T} f\Phi(u(x,t))dxdt,$$

zbog činjenice da $f_n \to f$ u $L^2(Q)$ i da $\Phi(u_n(x,t)) \to \Phi(u(x,t))$ po točkama pa onda i u $L^2(Q)$.

Primjenom (4.36) i prelaskom na limes u (4.31) dobivamo ocjenu:

$$\iint_{Q_T} |\nabla\Phi(u)|^2 dxdt \leq -\int_\Omega \Psi(u(x,T))dx + \int_\Omega \Psi(u_0(x))dx + \iint_{Q_T} f\Phi(u)dxdt.$$

Princip uspoređivanja slijedi direktno iz analognog principa koji vrijedi za glatka rješenja koji se na limesu proširuje na slaba rješenja.

□

Lema 4.2.1.2. *Tvrdnja teorema vrijedi i ako samo pretpostavimo da je u_0 omeđena i iščezava blizu granice Γ te da je f omeđena i nenegativna.*

Dokaz. Kao i ranije, funkciju u_0 aproksimiramo funkcijama $u_{0,n} := u_0 + \frac{1}{n}$ kako bismo izbjegli degeneriranost jednadžbe. Funkciju f aproksimiramo glatkim funkcijama iz $L^1(Q)$ koje konvergiraju u $L^1(Q)$. Ukoliko prijeđemo na podniz dobivamo i konvergenciju $f_n \to f$ gotovo svuda na Q.

Kvazilinearna teorija nam daje da aproksimirajuća zadaća ima rješenje $u_n \in C^{2,1}(Q \cup \Sigma)$. Ipak, funkcije u_n ne moraju biti neprekidne do $t = 0$, već vrijedi da $u_n(\cdot, t) \to u_0(\cdot)$ u $L^p(\Omega)$, za svaki p kad $t \to 0$.

Promotrimo prostor $C([0,T\rangle : L^1(\Omega)) = \{u : [0,T\rangle \to L^1(\Omega), \text{u neprekidna}\}$. Taj prostor je Banachov u normi $\|u\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}$, što je posljedica potpunosti prostora $L^1(\Omega)$.

Prisjetimo se ocjene stabilnosti u L^1 iz Teorema 3.2.1 koja vrijedi za klasična rješenja. Ocjena koju smo iskazali se odnosila na homogenu Dirichletovu zadaću, no slična ocjena vrijedi i za nehomogenu zadaću, gdje se na desnoj strani pojavljuje L^1 norma razlike rubnih uvjeta. Neka je $T > 0$ fiksan. Za $t \leq T$ imamo:

$$\begin{aligned} \|u_m(t) - u_n(t)\|_{L^1(\Omega)} &\leq \|u_{0,m} - u_{0,n}\|_{L^1(\Omega)} + \int_0^t \|f_m(s) - f_n(s)\|_{L^1(\Omega)} ds + C|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}|. \\ &< \varepsilon + T\varepsilon =: \varepsilon', \end{aligned}$$

čim su m i n dovoljno veliki indeksi. Dakle, u_n je Cauchyjev niz u prostoru $C([0,T\rangle; L^1(\Omega))$ pa postoji $u \in C([0,T\rangle; L^1(\Omega))$ za kojeg imamo konvergenciju $u_n \to u$ u normi $\|\cdot\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}$.

Kako su u_n omeđene onda se gornja konvergencija odvija i u $C([0,T\rangle : L^p(\Omega))$, $\forall p < \infty$.

Ocjena za gradijent $\nabla(\Phi(u_n))$ se dobiva na isti način kao i ranije pa opet dobivamo slabo konvergentan podniz $\nabla(\Phi(u_{p(n)})) \to \nabla(\Phi(u)) \in (L^2(Q))^d$.

Kako bismo zaključili da se radi o slabom rješenju, moramo vidjeti da

$$\iint_{Q_T} u_n \eta_t dxdt \to \iint_{Q_T} u\eta_t dxdt, \text{ te da } \iint_{Q_T} f_n \eta dxdt \to \iint_{Q_T} f\eta dxdt.$$

Druga konvergencija je jasna i slijedi iz činjenice da $f_n\eta \to f\eta$ u $L^1(Q_T)$. Naime $\|f_n\eta - f\eta\|_{L^1} \leq \|\eta\|_{L^\infty}\|f_n - f\|_{L^1}$.

Prva konvergencija slijedi iz činjenice da je konvergencija u normi $\|\cdot\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}$ jača od konvergencije u normi $\|\cdot\|_{L^1(0,T;L^1(\Omega))} = \|\cdot\|_{L^1(Q_T)}$. Naime:

$$\|u\|_{L^1(Q_T)} = \int_0^T \int_\Omega |u(x,t)| dxdt = \int_0^T \|u(\cdot,t)\|_{L^1} dt \leq T\|u\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}$$

Dakle opet dobivamo slabo rješenje. Na sličan način se pokaže da rješenje zadovoljava energetsku ocjenu i princip uspoređivanja.

□

Sad dokazujemo općeniti slučaj:

Neka je Ω općenita domena s Lipschitzovom granicom i neka imamo općenite podatke, za koje vrijedi $\Psi(u_0) \in L^1(\Omega)$, $u_0 \geq 0$ i $f \geq 0$, $f \in L^\infty(Q)$.

Potrebno je prvo aproksimirati domenu rastućom familijom domena Ω_n koje imaju rub Γ_n klase $C^{2,\alpha}$.

Uzmimo još rastući niz funkcija rezanja $\xi_n(x)$ koje se poništavaju blizu ruba od Ω_n i za koje vrijedi da $\eta_n(x) \to 1$ kad $n \to \infty$ za svaki $x \in \Omega$.

Definiramo niz aproksimacija:

$$u_{0,n}(x) = \min\{u_0(x)\xi_n(x), n\}. \tag{4.38}$$

Radi se o rastućem nizu omeđenih nenegativnih funkcija za koji vrijedi da je $(u_{0,n})_n \subset L^1(\Omega)$. To slijedi iz činjenice da je

$$\int_\Omega |u_{0,n}(x)| dx \leq \int_\Omega |u_0(x)| dx < \infty.$$

Kako je niz $u_{0,n}(x)$ dominiran funkcijom $u_0 \in L^1(\Omega)$ te za skoro svaki $x \in \Omega$ imamo $u_{0,n}(x) \to u_0(x)$, po teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi $\|u_0 - u_{0,n}\|_{L^1} \to 0$, kad $n \to \infty$. Nadalje, definiramo aproksimirajući niz $f_n := \xi_n f$.

Koristeći Lemu 4.2.1.2, zaključujemo da zadaće

$$(u_n)_t = \Delta(\Phi(u_n)) + f_n \qquad \text{na } Q_n, \tag{4.39}$$
$$u_n(x,0) = u_{0,n}(x) \qquad \text{na } \Omega_n, \tag{4.40}$$
$$u_n(x,t) = 0 \qquad \text{na } \Sigma_n \tag{4.41}$$

imaju jedinstvena rješenja u_n definirana na $Q_n := \Omega_n \times \langle 0, T\rangle$.

Primjetimo da, kako je Ω_n rastuća familija, onda je $u_{n+1} \geq 0$ na Σ_n. Princip uspoređivanja daje da je onda $u_{n+1} \geq u_n$ na Q_n.

Energetska ocjena (4.24) daje da je $\Psi(u_n)$ uniformno omeđen niz u $L^\infty(0,T;L^1(\Omega_n))$, $\forall T > 0$. Također dobivamo da je niz $\nabla(\Phi(u_n))$ uniformno omeđen u $(L^2(Q_n))^d$. Uniformnu ocjenu dobivamo iz desne strane u (4.24) primjenom Poincareove i Hölderove nejednakosti kao u (4.34). Proširimo funkcije u_n nulom na Ω.

Slijedi da u_n konvergira gotovo svuda u funkciju $u \in L^\infty(0,T;L_\Psi(\Omega))$. Naime, vrijedi da je

$$\sup_{0\leq t\leq T}\int_\Omega \Psi(u_n(x,t))dx \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Kako je Ψ rastuća funkcija i $u_{n+1} \geq u_n$ po točkama, tada je i $\Psi(u_{n+1}) \geq \Psi(u_n)$ za skoro svaki $(x,t) \in Q_T$. Definiramo funkciju $g(x,t) := \lim_{n\to\infty} \Psi(u_n(x,t)) \in [0,+\infty]$, $(x,t) \in Q_T$. Po Lebesgueovom teoremu o monotonoj konvergenciji slijedi da je $g \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$. Dakle je g gotovo svuda konačna i $\Psi(u_n)$ konvergira gotovo svuda u g. Kako je Ψ bijekcija, možemo definirati $u(x,t) := \Psi^{-1}(g(x,t))$ i dobivamo da u_n konvergira gotovo svuda u u. Sad, na limesu dobivamo da je $u \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ te da je $\sup_{0\leq t\leq T}\int_\Omega \Psi(u(x,t))dx \leq M$.

Također imamo da niz gradijenata $\nabla(\Phi(u_n))$ konvergira slabo u $L^2(Q_T)$ u $\nabla(\Phi(u))$. Zato je $\Phi(u) \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ i na limesu dobivamo da je u zaista slabo rješenje. □

4.3 Nehomogena Dirichletova zadaća

U ovome dijelu razmatramo poopćenje prethodne teorije u kojem imamo nehomogeni Dirichletov rubni uvjet. Pretpostavke su sljedeće: Ω je omeđena domena u $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ s regularnom Hölderovom granicom $\Gamma = \partial\Omega \in C^{2,\alpha}$. Kao i ranije, pretpostavljamo da za Φ vrijede pretpostavke (4.23). Formulirajmo općenitu Dirichletovu zadaću za jednadžbu porozne sredine:

GDP-problem - generalizirana Dirichletova zadaća:

Za dane izmjerive funkcije u_0 na Ω, g na Σ_T, f na Q_T, naći lokalno integrabilnu funkciju $u = u(x,t)$ definiranu na Q_T za koju vrijedi:

$$u_t = \Delta(\Phi(u)) + f \qquad \text{na } Q_T, \tag{4.42}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad \text{na } \Omega, \tag{4.43}$$

$$\Phi(u(x,t)) = g(x,t) \qquad \text{na } \Sigma_T \tag{4.44}$$

u slabom smislu kojeg ćemo naknadno definirati.

Moramo prvo odabrati klasu funkcija u kojoj ćemo potražiti rješenja i koja će garantirati jedinstvenosti egzistenciju te neprekidnu ovisnost o početnim podacima. Ovisno o odabiru tog funkcijskog prostora, moramo zadati i prekladne pretpostavke na podatke u_0, f i g.

Kako bismo uzeli rubni uvjet (4.44) u obzir, zahtjevat ćemo da je $\Phi(u) \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ te da zadovoljava uvjet u smislu traga. Prosjetimo se nekih činjenica o operatoru traga:

Operator traga $T_{\partial\Omega}$ je linearan i neprekidan operator koji preslikava $H^1(\Omega)$ u $H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$ i proširuje operator restrikcije na rub koji je definiran za neprekidne funkcije. U kontekstu evolucijskih jednadžbi promatramo proširenje operatora traga do neprekidnog linearnog operatora $T_\Sigma : L^2(0,T;H^1(\Omega)) \to L^2(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega)) \subset L^2(\Sigma_T)$.

Definicija 4.3.1. *Neka su $u_0 \in L^1(\Omega)$, $g \in L^2(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega))$ i $f \in L^1(Q_T)$. Za lokalno integrabilnu funkciju u definiranu na Q_T kažemo da je slabo rješenje problema* (4.42)-(4.44) *ako vrijedi sljedeće:*

$$\Phi(u) \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \text{ i } T_\Sigma(\Phi(u)) = g,$$

$$u \in L^2(\Omega \times \langle 0,T\rangle),$$

te u zadovoljava:

$$\iint_{Q_T} \nabla(\Phi(u)) \cdot \nabla\eta - u\eta_t dxdt = \int_\Omega u_0(x)\eta(x,0)dx + \iint_{Q_T} f\eta dxdt, \quad \forall\eta \in C^1(\overline{Q_T}) \tag{4.45}$$

pri čemu η iščezava na Σ i za $t = T$.

U ovoj definiciji smo dodali pretpostavke o kvadratnoj integrabilnosti funkcija koje su nam bile potrebne za jedinstvenost slabih energetskih rješenja. Teorem jedinstvenosti je ovdje identičan kao i ranije i stoga ga nećemo dokazivati.

Teorem 4.3.2. *Zadaća* (4.42)-(4.44) *ima najviše jedno slabo rješenje u smislu Definicije 4.3.1.*

Za dokaz egzistencije potrebna je dodatna pretpostavka o regularnosti rubnog uvjeta $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$:

$$\text{Postoji funkcija } G \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \text{ takva da je } T_\Sigma(G) = g \text{ i da je } G, G_t \in L^\infty(Q). \tag{4.46}$$

Sljedeći teorem nam daje egzistenciju rješenja nehomogene zadaće, međutim, nećemo ga dokazivati radi opširnosti dokaza. Dokaz se oslanja na već viđene tehnike aproksimacije i prelaska na limes aproksimacijskih rješenja i može se naći u knjizi [].

Teorem 4.3.3. *Pretpostavimo da vrijedi pretpostavka* (4.46). *Neka je $u_0 \in L_\Psi(\Omega)$ i $f \in L^2(Q_T)$. Tada postoji slabo rješenje $u \in L^\infty(0,T;L_\Psi(\Omega))$ Dirichletove zadaće* (4.42)-(4.44). *Za ova rješenja vrijedi princip uspoređivanja:*

Ako su u, $\hat{u}$ dva slaba rješenja Dirichletove zadaće uz podatke za koje vrijedi: $u_0 \le \hat{u}_0$ skoro svuda na Ω, $f \le \hat{f}$ skoro svuda na Q_T i $g \le \hat{g}$ skoro svuda na Σ, tada vrijedi da je $u \le \hat{u}$ skoro svuda na Q_T.

Primjeri rješenja dani u Poglavlju 3 (putujući valovi, izvorna rješenja, ...) su sve slaba rješenja kad se restringiraju na parabolički cilindar $Q = \Omega \times \langle 0,T\rangle$. Time vidimo da slaba nenegativna rješenja ne moraju nužno biti diferencijabilne funkcije. Ovime završavamo ovu temu i u nastavku rješavamo nehomogeni Dirichletov problem numeričkim metodama.

Poglavlje 5

Numerički rezultati

5.1 Infiltracija vode u naftu

Prisjetimo se, tok dvaju nemješivih fluida kroz poroznu sredinu opisujemo sistemom parcijalnih diferencijalnih jednadžbi za varijable zasićenja i brzine:

$$\partial_t(\phi\rho_n s_n) + \mathrm{div}(\rho_n \vec{q_n}) = 0, \tag{5.1}$$

$$\partial_t(\phi\rho_w s_w) + \mathrm{div}(\rho_w \vec{q_w}) = 0, \tag{5.2}$$

gdje s_n označava zasićenje nevlažećom fazom, a s_w zasićenje vlažećom fazom te analogno za $\vec{q_n}$ i $\vec{q_w}$. Gornje jednadžbe su jednadžbe sačuvanja mase, kojima dodajemo još dvije jednadžbe Darcy-Muskatovog zakona za dvofazni sustav:

$$\vec{q_n} = -\frac{k}{\mu_n} k_{rn}(\nabla p_n + \rho_n \vec{g}), \tag{5.3}$$

$$\vec{q_w} = -\frac{k}{\mu_w} k_{rw}(\nabla p_w + \rho_w \vec{g}), \tag{5.4}$$

Za zasićenja s_w i s_n vrijedi $s_w + s_n = 1$ i dodatno pretpostavljamo da vrijedi: $\vec{q_n} + \vec{q_w} = 0$. Na taj način eliminiramo dvije jednadžbe i dvije nepoznanice. Ovisnost među tlakovima p_n i p_w je dana zakonom kapilarnog tlaka:

$$p_n - p_w = p_c(s_w). \tag{5.5}$$

Uz dane pretpostavke, sustav se svodi na jednadžbu porozne sredine za zasićenje vlažeće faze koja glasi:

$$0 = \partial_t s_w + \mathrm{div}(k\frac{k_{rw}k_{rn}}{\mu_w k_{rn} + \mu_n k_{rw}} p_c'(s_w)\nabla s_w) = \partial_t s_w - \Delta(\Phi(s_w)), \tag{5.6}$$

gdje je

$$\Phi(s_w) = -\int_0^{s_w} k \frac{k_{rw}k_{rn}}{\mu_w k_{rn} + \mu_n k_{rw}} p_c'(s)ds \tag{5.7}$$

Za funkcije relativnih propusnosti k_{rw}, k_{rn} i funkciju kapilanog tlaka p_c uzimamo Van Genuchtenov model koji daje da su funkcije dane sljedećim formulama:

$$p_c(s_w) = \frac{1}{\alpha}(s_w^{-1/m} - 1)^{1/n}, \tag{5.8}$$

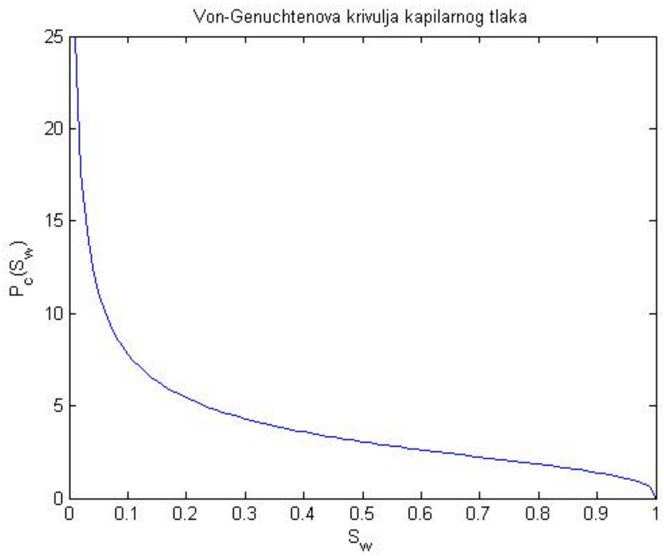
pri čemu je $n = 2, ..., 5$, $m = 1 - 1/n$, $\alpha > 0$.

Relativne propusnosti su također dane kao funkcije zasićenja vlažeće faze:

$$k_{rw}(s_w) = \sqrt{s_w}[1 - (1 - s_w^{1/m})^m]^2, \tag{5.9}$$

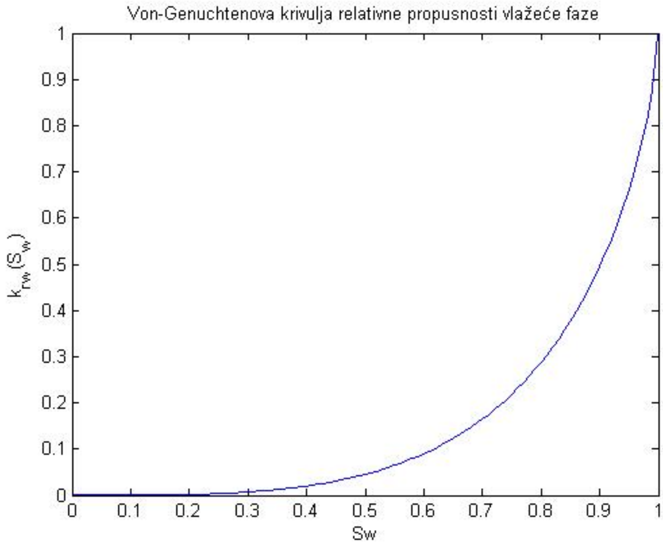
$$k_{rn}(s_w) = \sqrt{1 - s_w}[1 - s_w^{1/m}]^{2m}. \tag{5.10}$$

Odaberimo, radi određenosti, $m = 3$, $\alpha = 0.4$.

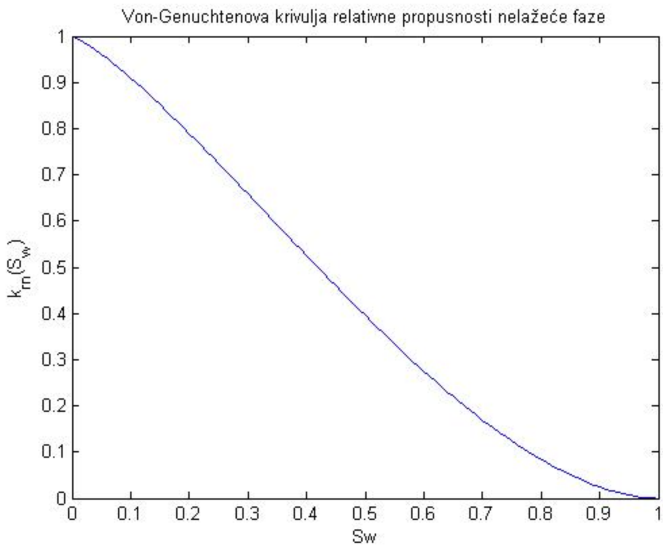


Slika 5.1: Van Genuchtenova funkcija kapilarnog tlaka

Uvrstimo li gornje formule u (5.7) dobivamo funkciju nelinearnosti koja zadovoljava pretpostavke dovoljne za egzistenciju slabog rješenja.



Slika 5.2: Van Genuchtenova funkcija $k_r w(s_w)$



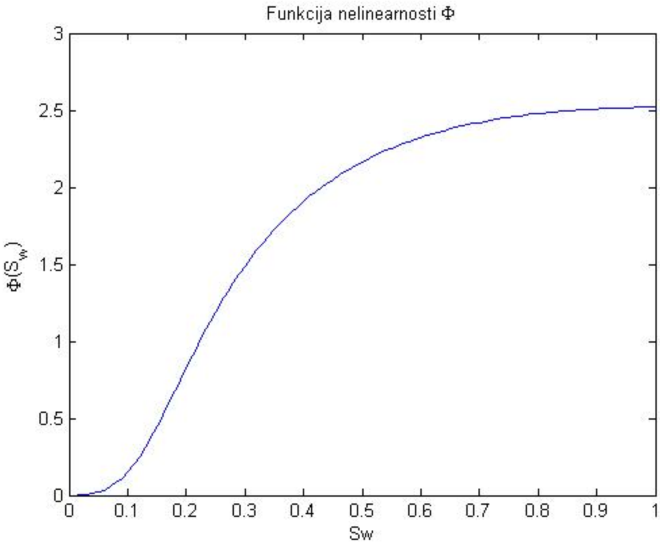
Slika 5.3: Van Genuchtenova funkcija $k_r n(s_n)$

Zadaća koju ćemo riješiti je postavljena na kvadratu $Y = [0,1]^2$ i glasi:

$$u_t^\delta = \delta^2 \Delta(\Phi(u^\delta)) \qquad \text{na } Q_T := Y \times \langle 0, T \rangle,\ \delta > 0, \tag{5.11}$$

$$u^\delta(x, 0) = g(0) \qquad \text{na } \Omega := Y, \tag{5.12}$$

$$u^\delta(x, t) = g(t) \qquad \text{na } \Sigma_T := \partial Y \times \langle 0, T \rangle, \tag{5.13}$$



Slika 5.4: Funkcija nelinearnosti Φ

gdje smo promijenili oznaku $u \equiv s_w$. Promatrat ćemo ponašanje rješenja u ovisnosti o parametru δ. Zadaća reprezentira infiltraciju vode (vlažeće faze) u domenu ispunjenu naftom (nevlažećom fazom). Uzimamo da je dinamička viskoznost vode $\mu_w = 10^{-3} Ns/m^2$ dok je dinamička viskoznost nafte $\mu_n = 1 Ns/m^2$. Također, radi jednostavnosti uzimamo da je poroznost $\phi = 0.8$ te propusnost $k = 1$. Uz povoljan odabir funkcije g, teoremi 4.3.3 i 4.3.2 nam daju egzistenciju i jedinstvenost nenegativnog slabog rješenja u_h u prostoru $L^\infty(0, T; L_\Psi(\Omega))$. Zadaću diskretiziramo na način da odaberemo prostor konačnih elemenata V_h razapet nodalnom bazom $\{\phi_1, ..., \phi_N\}$ i rješenje potražimo u obliku

$$u_h(x, t) = \sum_{j=1}^{N} U_j(t)\phi_j(x),$$

pri čemu je $U_j(t) = g(t)$, na rubu. Uvrštavamo u_h u varijacijsku jednadžbu

$$\iint_{Q_T} \{\delta^2 \nabla(\Phi(u_h)) \cdot \nabla\eta + \frac{\partial u_h}{\partial t}\eta\} dx = 0, \forall \eta \in V_h, \tag{5.14}$$

u kojoj se dodatno pretpostavlja da rješenje u_h ima vremensku derivaciju $\frac{\partial u_h}{\partial t} \in L^2(Q_T)$.

Testiranjem na funkcijama nodalne baze dobivamo sljedeći sustav jednadžbi:

$$\iint_{Q_T} \{\delta^2 \Phi'(u_h) \sum_{j=1}^{N} U_j(t) \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i dx + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial U_j}{\partial t}\phi_j\phi_i\} dx = 0, \forall i \in \{1, .., N\}, \tag{5.15}$$

Koji matrično zapisujemo kao:

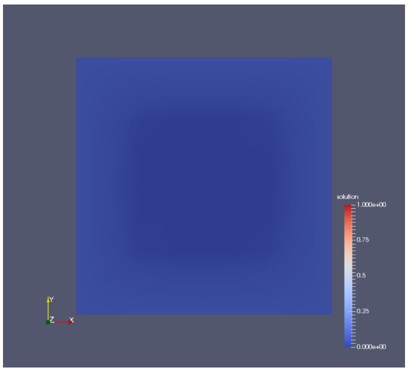
$$\mathbb{M}\frac{\partial U}{\partial t} + \delta^2 \mathbb{A}(U)U = 0, \text{ gdje je } U(0) := U_0 \text{ zadano} \tag{5.16}$$

i pri čemu je aproksimativni početni podatak dan s $u_{0,h} = \sum_{k=1}^{N} U_0 \phi_k = g(0)$. Matrice $\mathbb{M}$ i $\mathbb{A}(U)$ su definirane sa $[\mathbb{M}]_{i,j} := (\phi_i, \phi_j)_{L^2(\Omega)}$, $[\mathbb{A}(U)]_{i,j} := (\Phi'(u_h)\nabla\phi_i, \nabla\phi_j)_{(L^2(\Omega))^d}$.
Diskretizacijom po vremenu dobivamo nelinearni sustav

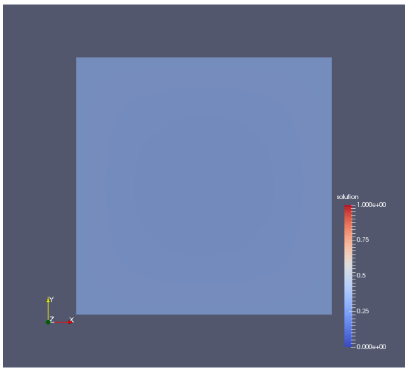
$$(\mathbf{M} + \Delta t \delta^2 \mathbf{A}(U^n))U^n = \mathbf{M}U^{n-1}, \text{ gdje je } U^0 = U_0, \tag{5.17}$$

pri čemu za diskretizaciju koristimo implicitnu Eulerovu metodu. Dobiveni sustav rješavamo Newtonovom metodom. Rubni uvjet zadajemo formulom $g(t) := t$ i zadaću rješavamo na vremenskom intervalu $[0, T]$, uzimajući pritom da je vrijednost parametra δ redom 1, 0.1, 0.01 i 0.001.
Za numeričko računanje koristimo software DUNE, posebice modul DUNE-PDELab. Za detalje o DUNE-u pogledati [6], [7].

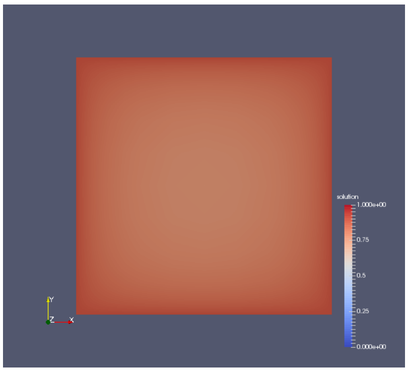
Na slikama se lako primjećuje konačna brzina infiltracije vode. Kako bi shema ostala stabilna pri pojavi rubnog sloja, koristimo strukturiranu mrežu koju eksponencijalno progušćujemo prema rubu, kao na Slici (5.9).



(a) $t = 10s$

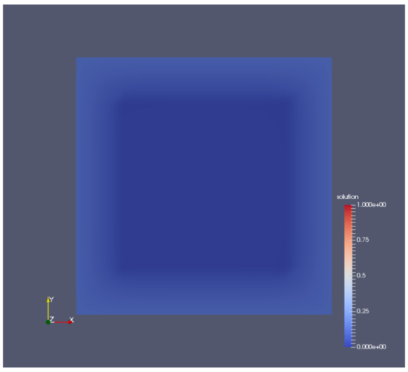


(b) $t = 50s$

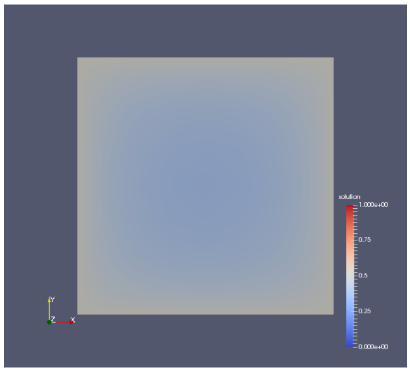


(c) $t = 90s$

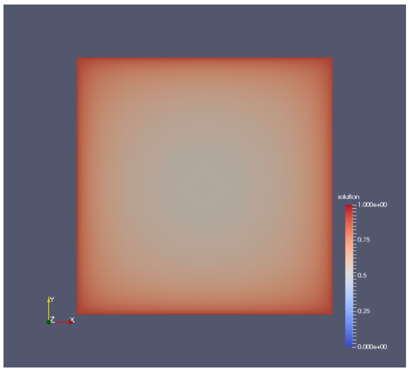
Slika 5.5: Propagacija za $\delta = 1$



(a) $t = 10s$

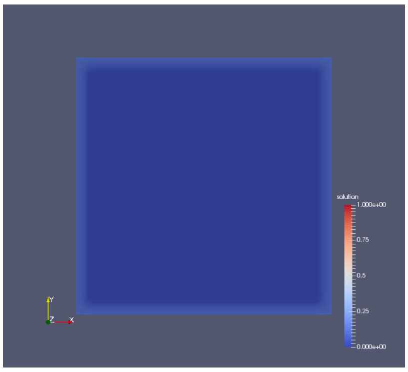


(b) $t = 50s$

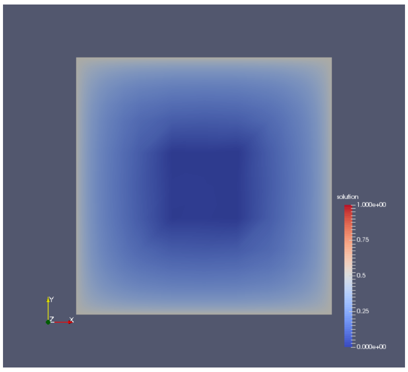


(c) $t = 90s$

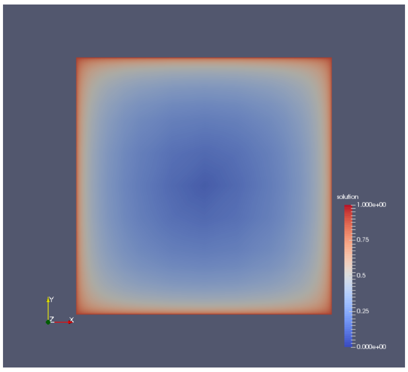
Slika 5.6: Propagacija za $\delta = 0.1$



(a) $t = 10s$

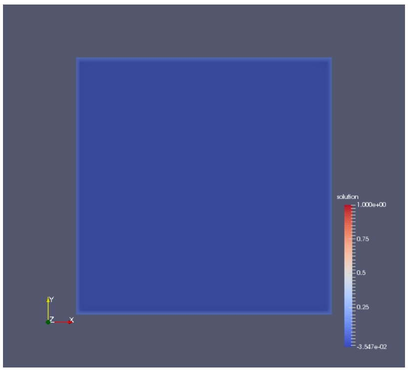


(b) $t = 50s$

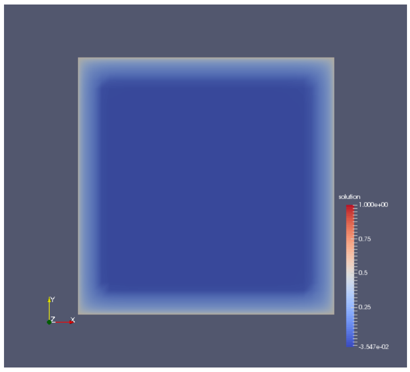


(c) $t = 90s$

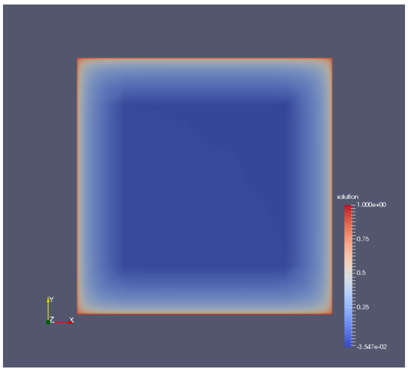
Slika 5.7: Propagacija za $\delta = 0.01$



(a) $t = 10s$

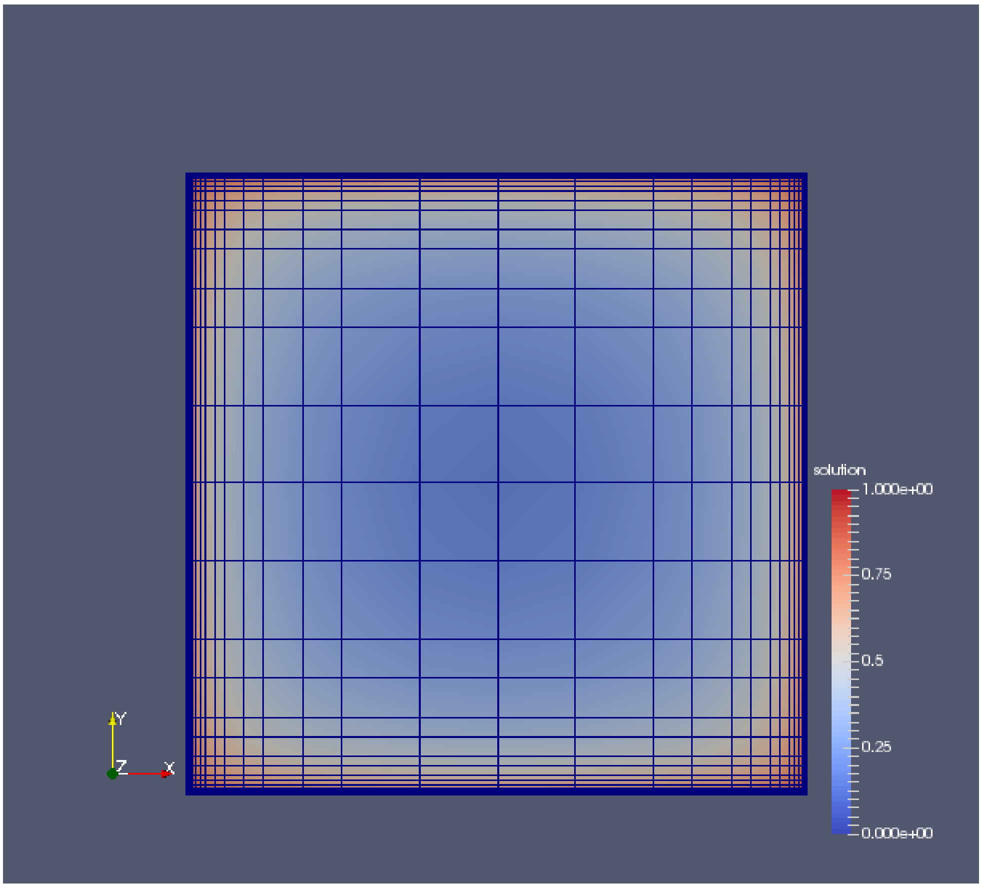


(b) $t = 50s$



(c) $t = 90s$

Slika 5.8: Propagacija za $\delta = 0.001$



Slika 5.9: Strukturirana mreža korištena u aproksimaciji

Dodatak A

Prostori Soboljeva

U ovome dodatku dajemo kratki osvrt na teoriju slabih derivacija i prostore Soboljeva. Počinjemo s definicijom slabih parcijalnih derivacija.

Definicija A.0.1. *Neka je $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ otvoren i neka su $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$. Neka je $\alpha \in \mathbb{N}^d$ multiindeks. Kažemo da je v α-ta slaba parcijalna derivacija od u i pišemo:*

$$v = \partial^\alpha u$$

ako vrijedi

$$\int_\Omega u \partial^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \phi dx,$$

za sve test funkcije $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Osnovna lema varijacijskog računa nam daje da je slaba parcijalna derivacija, ako postoji, jedinstvena.

Definicija A.0.2. *Za $1 \leq p \leq \infty$ i $m \in \mathbb{N}$, skup*

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega), \partial^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq m\}$$

nazivamo Soboljevljev prostor.

Skup $W^{m,p}(\Omega)$ je vektorski prostor na kojem definiramo prirodnu normu na sljedeći način:

$$||u||_{m,p} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |\partial^\alpha u|^p dx \right)^{1/p} & \text{za } 1 \leq p < \infty; \\ \max_{|\alpha| \leq m} ||\partial^\alpha u||_{L^\infty} & \text{za } p = \infty. \end{cases}$$

U slučaju $p = 2$ gornja norma potječe od skalarnog produkta

$$\langle u, v\rangle = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega \partial^\alpha u \partial^\alpha v dx$$

i za te Soboljevljeve prostore koristimo posebnu oznaku

$$H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega).$$

Jedno bitno svojstvo prostora Soboljeva je potpunost.

Teorem A.0.3. *Za svaki $m \in \mathbb{N}$ i $1 \leq p \leq \infty$ Soboljevljev prostor $W^{m,p}(\Omega)$ je Banachov. Posebno su prostori $H^m(\Omega)$ Hilbertovi.*

Kad su u pitanju homogene Dirichletove zadaće, bitnu ulogu imaju sljedeći potprostori.

Definicija A.0.4. *Prostore $W_0^{m,p}(\Omega)$ definiramo kao zatvarače prostora testnih funkcija u odgovarajućim Soboljevljevim prostorima*

$$W_0^{m,p}(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)},$$

$$H_0^m(\Omega) := W_0^{m,2}(\Omega).$$

U našim razmatranjima bavimo se funkcijama vremenske varijable t i prostorne varijable x. Kako često želimo naglasiti da se funkcija $u(\cdot, t)$ nalazi u nekom Banachovom funkcijskom prostoru V, za skoro svaki t, koristimo sljedeću notaciju. Funkciji

$$(x, t) \to u(x, t) \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T]$$

pridružujemo funkciju

$$t \to \hat{u}(t) \in V, \quad t \in [0, T],$$

na način da je

$$[\hat{u}(t)](x) = u(x, t).$$

U tom duhu dajemo sljedeće definicije tzv. *Evolucijskih prostora.*

Prostor $L^p(0, T; V)$ sadrži sve izmjerive funkcije $u : [0, T] \to V$ za koje je

$$\|u\|_{L^p(0,T;V)} := \Big(\int_0^T \|u(t)\|^p dt\Big)^{1/p} < \infty, \quad p < \infty,$$

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;V)} := \operatorname{ess\,sup} \|u(t)\| < \infty.$$

Prostor $C([0,T];V)$ sadrži sve neprekidne funkcije $u : [0,T] \to V$ za koje je

$$\|u\|_{C([0,T];V)} := \max_{0 \leq T} \|u(t)\| < \infty.$$

Navodimo još teorem o tragu, operatoru bitnom u teoriji Dirichletovih zadaća.

Teorem A.0.5. *Neka je Ω omeđen i $\partial\Omega$ klase C^1. Tada postoji neprekidni linearni operator*

$$T_{\partial\Omega} : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

takav da:
(*i*) $T_{\partial\Omega} u = u_{|\partial\Omega}$, *za* $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$,
(*ii*) $\|T_{\partial\Omega} u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, *gdje C ovisi samo o Ω i p.*

Ovime završavamo ovaj kratki pregled. Detaljni dokazi i dodatne činjenice se mogu naći u [3] i [1].

Bibliografija

[1] L. Evans, *Partial Differential Equations*, AMS, Providence, Rhode Island, 2010.

[2] O. A. Ladyzhenskaja, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'ceva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type,* volume 23 of Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, 1968.

[3] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations,* Springer, New York, 2010.

[4] J. L. Vazquez, *The porous medium equation. Mathematical theory,* Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2007.

[5] J. Bear, *Dynamics of Fluids in Porous Media,* Dover Publications, Inc. New York, 1972.

[6] `http://www.dune-project.org/index.html.`

[7] P. Bastian, F. Heimann, S. Marnach, *Generic implementation of finite element methods in the distributed and unified numerics environment (DUNE),* Kybernetika, 46(2), pp.294-315, 2010

Sažetak

U ovome radu smo proučavali jednadžbu porozne sredine, nelinearnu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu paraboličkog tipa, koja ima prilično zanimljiva svojstva. U Poglavlju 1 prezentiramo modele u kojima se pojavljuje JPS ili neka njena generalizacija. Nadalje se bavimo njenim specijalnim rješenjima i njihovim svojstvima, izvodimo formule i dokazujemo korisnu propoziciju o graničnom rješenju. U Poglavlju 3 izvodimo apriorne ocjene bitne za daljnji nastavak teorije. U Poglavlju 4 dajemo precizne definicije slabih rješenja homogene Dirichletove zadaće i dokazujemo njihovu egzistenciju i jedinstvenost. U zadnjem poglavlju prezentiramo primjer numeričkog rješenja vezanog uz dvofazni tok u poroznoj sredini.

Summary

In this thesis we study porous medium equation, nonlinear partial differential equation of parabolic type with some particularly interesting properties. In Chapter 1, we present models involving PME or some of its generalizations. Furthermore, we deal with its special solutions and study their properties, calculate formulas and we give proof to a useful proposition about limit solution. In Chapter 3 we derive a priori bounds crucial for further development of the theory. In Chapter 4 we give precise definitions of weak solutions of homogeneous Dirichlet problem and give proof to their existence and uniqueness. A numerical example related to two-phase flow in porous medium is presented in the last chapter.

Životopis

Rođen sam 10.1.1993. u Zagrebu. Nakon završene Osnovne škole Grigora Viteza, upisao sam Prirodoslovnu školu Vladimira Preloga. Godine 2011. upisujem preddiplomski studij matematike na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu. Nakon završetka, 2014. godine upisujem diplomski studij Primjenjena matematika.